

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
PRODUÇÃO**

João Eugênio Cavallazzi

**MODELO DE EXPANSÃO DE CAPACIDADE COM  
EQUILÍBRIO ESPACIAL DE MERCADOS**

TESE DE DOUTORADO

Florianópolis  
2013



João Eugênio Cavallazzi

**MODELO DE EXPANSÃO DE CAPACIDADE COM  
EQUILÍBRIO ESPACIAL DE MERCADOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia da Produção.

Orientador: Sérgio Fernando Mayerle,  
Dr.

Florianópolis  
2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Cavallazzi, João Eugênio

MODELO DE EXPANSÃO DE CAPACIDADE COM EQUILÍBRIO  
ESPACIAL DE MERCADOS / João Eugênio Cavallazzi ;  
orientador, Sérgio Fernando Mayerle - Florianópolis, SC,  
2013.

225 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia de Produção.

Inclui referências

1. Engenharia de Produção. 2. Expansão de Capacidade. 3.  
Equilíbrio Perfeito de Markov. 4. Equilíbrio de Nash. 5.  
Inequações Variacionais. I. Mayerle, Sérgio Fernando. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia de Produção. III. Título.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **JOÃO EUGÊNIO CAVALLAZZI**

Graduou-se em Engenharia Civil em 1979 na Universidade Federal de Santa Catarina. Obteve o título de Mestre em Engenharia de Produção em 1984 na Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE, tendo como área de concentração: Pesquisa Operacional e o trabalho aplicado à Cia Siderúrgica Nacional com o título: “Otimização do Fluxo de Lingotes em uma Aciaria: o caso da Cia Siderúrgica Nacional (CSN)”.



João Eugênio Cavallazzi

**MODELO DE EXPANSÃO DE CAPACIDADE COM  
EQUILÍBRIO ESPACIAL DE MERCADOS**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de  
“**DOUTOR**” e aprovada em sua forma final pelo Programa de pós-  
graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de  
Santa Catarina.

Florianópolis (SC), 23 de agosto de 2013.

---

Prof.<sup>a</sup> Lucila Maria De Souza, Dra.  
Coordenadora PPGE/UFSC

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Sérgio Fernando Mayerle, Dr.  
Orientador - UFSC

---

Prof. Antônio Sérgio  
Coelho, Dr.  
UFSC

---

Prof. Edson Tadeu Bez, Dr.  
Examinador Externo

---

Prof. Rafael Machado Casali, Dr.  
UFSC – JVE

---

Prof. Rogério Malta  
Branco, Dr.  
Examinador Externo

---

Daniela Brandão  
Nascimento, Dra.  
Examinadora Externa





Dedico esta conquista aos meus queridos pais,  
Janeto (in memorium) e Nilce.



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao meu orientador, Sérgio Fernando Mayerle, pela sua brilhante e dedicada orientação e sugestões que muito contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa. Agradeço também pelo seu apoio, confiança e paciência em me atender em longas reuniões de orientação em horários que, muitas vezes, me eram convenientes.

Às minhas filhas, Manuella, Giovanna e Rafaella e a toda minha família pelo incentivo, carinho e principalmente pela compreensão.

Ao prof. Antônio Sérgio Coelho pelo apoio e incentivo em muitos momentos ao longo desta caminhada.

À Universidade Federal de Santa Catarina, pela oportunidade de obter mais esta formação, um dos meus grandes objetivos de vida.



Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.

(Paulo Freire, 1989).



## RESUMO

CAVALLAZZI, João Eugênio; MAYERLE, Sérgio Fernando (Orientador). **Modelo de Expansão de Capacidade com Equilíbrio Espacial de Mercados**. 2013. 225p. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção – Programa de pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis (SC), 2013.

O objetivo deste trabalho é investigar, propor e elaborar um modelo que determina a política ótima de expansão de capacidade de empresas inseridas em diferentes estruturas de mercados espacialmente distribuídos, considerando situações de competição perfeita, monopólio e oligopólio. Assume-se que o produto em questão é uma *commodity* e a demanda cresce de forma determinística ao longo do tempo. Os investimentos das empresas são realizados em sequência segundo um processo estocástico que governa este sequenciamento, de forma a garantir a unicidade da solução. O modelo proposto aborda o problema em dois estágios: em um primeiro estágio, chamado de jogo de longo prazo, as empresas a cada período fazem suas escolhas de investimento de forma a adequar capacidade de produção e maximizar os seus lucros. O conceito de Equilíbrio Perfeito de Markov foi aplicado para a obtenção da política ótima de expansão. A solução ótima de longo prazo é obtida através da Programação Dinâmica. Em um segundo estágio, chamado de jogo de curto prazo, as capacidades são fixadas e a competição volta-se para a participação de mercado. É quando as empresas produtoras se comportam segundo o modelo de Cournot-Nash, pelo qual cada empresa considera as decisões das demais empresas como fixas, quando decide o seu nível ótimo de produção e fluxos do produto para os mercados consumidores. O conceito de equilíbrio espacial de mercados foi aplicado e a solução de curto prazo, que é obtida através da formulação de um problema de inequações variacionais. Utilizou-se a técnica de simulação de Monte Carlo para analisar as distribuições de probabilidade das variáveis de decisão do modelo. O modelo foi aplicado a um exemplo numérico teórico de duopólio, através do qual foi possível analisar comportamentos qualitativos de competições entre empresas envolvendo um mercado distribuído espacialmente. O modelo permite considerar diferentes estruturas competitivas de mercados, tais como, oligopólios, monopólios e concorrência perfeita. Entre os principais resultados, destaca-se a verificação de que os custos logísticos impactam significativamente a política ótima de expansão de capacidade.

**Palavras Chaves**

Expansão de Capacidade; Equilíbrio Perfeito de Markov; Equilíbrio de Nash; Programação Dinâmica; Inequações Variacionais; Opções Reais; Oligopólio.



## ABSTRACT

CAVALLAZZI, João Eugênio; MAYERLE, Sérgio Fernando (Orientador). **Capacity Expansion Model with Spatial Market Equilibrium**. 2013. 225p. Doctoral Thesis in Production Engineering – Postgraduate Program in Production Engineering, Federal University of Santa Catarina – UFSC, Florianópolis (SC).

This work aims at investigating, proposing and implementing a model that determines the optimal expansion capacity strategy for companies that operate in spatially distributed markets, regarding perfect competition, monopoly and oligopoly market scenarios. It is assumed that the product in question is a commodity and deterministic demand grows over time. Companies' investments are undertaken in sequence according to a stochastic process that governs this sequencing in order to ensure the uniqueness of the solution. The proposed model addresses the problem in two stages: in the first stage, called long-term game, companies make their investment choices in each period in order to adjust production capacity and maximize their profits. The concept of Perfect Markov Equilibrium was applied to obtain the optimal expansion strategy, using dynamic programming. In the second stage, called short-term game, once investments in capacity expansion have already been performed in a given period of time, capacities are fixed and then competition turns to market share, when companies are focused on determining its optimal level of production and product flows to the consumer markets. The concept of spatial equilibrium market was applied for companies competing according to a Cournot-Nash model in a spatially distributed market. The short-term equilibrium was obtained through the formulation of a variational inequality problem. Monte Carlo simulation has been used to analyze the probability distributions of the companies' decision variables. The model was applied to a theoretical numerical example of a duopoly, where it was possible to analyze various qualitative behaviors of competition involving a spatially distributed market. Among the main results is the finding that logistic costs have a significant impact in the optimal capacity expansion policy.

### Key Words

Capacity Expansion; Equilibrium; Markov Perfect Equilibrium; Nash Equilibrium; Dynamic Programming; Variational Inequality Problem; Real Options; Oligopoly.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Consumo da capacidade com o crescimento da demanda.....	12
Figura 2.2	Combinação de outros problemas com o problema de expansão de capacidade.....	17
Figura 2.3a	Evolução bibliográfica 1960-1995 – principais trabalhos.....	34
Figura 2.3b	Evolução bibliográfica 1995-2012 – principais trabalhos.....	35
Figura 2.4	Métodos de solução do problema de expansão de capacidade.....	36
Figura 2.5	Modelos que tratam de equilíbrio, jogos de opção e equilíbrio perfeito de Markov.....	38
Figura 2.6	Modelos dinâmicos.....	39
Figura 2.7	Modelos com investimentos discretos.....	40
Figura 2.8	Modelos com mercados espaciais.....	41
Figura 3.1	O problema da viagem entre as cidades A e J.....	49
Figura 3.2	A Curva da Oferta.....	63
Figura 3.3	A Curva da Demanda.....	64
Figura 3.4	Ponto de Equilíbrio para um produto em um mercado local.....	67
Figura 3.5	Quantidade ótima de um monopolista.....	69
Figura 3.6	Curvas de reação das empresas a e b.....	74
Figura 3.7	Distribuição espacial de mercados.....	78
Figura 4.1	Mecanismo geral do modelo proposto.....	90
Figura 4.2	Estrutura de rede do problema de equilíbrio espacial.....	92
Figura 4.3	Exemplo de solução não única para o equilíbrio de Nash.....	99
Figura 4.4	Evolução de estado com estratégias Markovianas....	102
Figura 4.5	Mecanismo de crescimento da demanda.....	107
Figura 4.6	Efeito de um incremento na quantidade ofertada no custo total de produção do produtor $i$ .....	113
Figura 4.7	Efeito de um incremento na quantidade ofertada na receita do produtor $i$ no mercado $j$ .....	114
Figura 4.8	Efeito de um incremento na quantidade transportada no custo de transporte do produtor $i$ para o mercado $j$ ....	114
Figura 5.1	Estrutura espacial do exemplo numérico.....	120

Figura 5.2	Evolução das expansões e capacidades acumuladas da empresa 1 em um exemplo simétrico.....	125
Figura 5.3	Gráfico de dispersão dos valores presentes das empresas - rodada 1.....	127
Figura 5.4	Histograma da diferença entre VP1 e VP2 – rodada 1.....	128
Figura 5.5	Gráfico de dispersão das capacidades e dos fluxos em três momentos do horizonte de planejamento - com espacialidade.....	129
Figura 5.6	Dispersão do Valor Presente - rodadas 1 e 2.....	131
Figura 5.7	Histogramas de Valor Presente.....	132
Figura 5.8	Capacidades e produção em equilíbrio ao longo do tempo para os casos com e sem espacialidade.....	133
Figura 5.9	Comportamento de preços em equilíbrio ao longo do tempo para casos com e sem espacialidade.....	135
Figura 5.10	Dispersão do Valor Presente - rodadas 3, 4 e 5.....	137
Figura 5.11	Histogramas do Valor Presente para um caso de assimetria nos custos - rodada 4.....	137
Figura 5.12	Distribuição espacial dos mercados - rodada 6.....	138
Figura 5.13	Histogramas do Valor Presente - Rodada 6.....	139
Figura 5.14	Distribuição espacial dos mercados – casos especiais.....	139
Figura 5.15	Histogramas de Valor Presente com localizações equidistantes – rodada 7.....	141
Figura 5.16	Histogramas do Valor Presente – rodada 8.....	142
Figura 5.17	Histogramas do Valor Presente – rodada 9.....	142
Figura 5.18	Histogramas do Valor Presente – rodada 10.....	143
Figura 5.19	Gráficos de dispersão do Valor Presente – rodadas 7-10.....	144
Figura 5.20	Gráficos de dispersão do Valor Presente – rodadas 11 e 12.....	145
Figura 5.21	Gráfico de dispersão das capacidades e fluxos em três momentos do horizonte de planejamento – rodada 11.....	146
Figura 5.22	Capacidades e fluxos ao longo do tempo - rodada 12.....	147
Figura 5.23	Gráficos de dispersão do Valor Presente – rodadas 13, 14 e 15.....	150
Figura 5.24	Capacidades e fluxos ao longo do tempo - rodada 13.....	151
Figura 5.25	Gráficos de dispersão do valor presente com	

	economias de escala – rodadas 16, 17 e 18.....	152
Figura 5.26	Capacidades e fluxos ao longo do tempo - rodada 18.....	155
Figura 5.27	Histogramas do Valor Presente - rodadas 19, 20, 21 e 22.....	156
Figura 5.28	Crescimento do tempo computacional (em seg.) versus nº de empresas no oligopólio.....	157
Figura A.1	Componentes de um jogo na forma extensiva.....	182
Figura B.1	Interpretação geométrica de $VI(F,K)$ .....	188
Figura B.2	A projeção $y$ de $x$ sobre o conjunto viável.....	192
Figura B.3	Representação geométrica do problema de inequação variacional.....	193



## LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1	Lucros da empresa $a$ e empresa $b$ sob competição Cournot.....	73
Quadro 5.1	Premissas básicas comuns a todas as análises de sensibilidade.....	123
Quadro 5.2	Dados da rodada base.....	124
Quadro 5.3	Dados da rodada 1 (rodada base) e 2.....	131
Quadro 5.4	Dados das rodadas 3, 4 e 5.....	136
Quadro 5.5	Custos de transporte - rodada 6.....	138
Quadro 5.6	Custos de transporte - rodadas 7 a 10.....	140
Quadro 5.7	Dados de capacidades - rodadas 11 e 12.....	145
Quadro 5.8	Dados de probabilidades de investir - rodadas 13 a 15.....	149
Quadro 5.9	Fatores de economia de escala - rodadas 16, 17 e 18.....	152
Quadro 5.10	Plano de expansão e valor presente esperado das empresas 1 e 2, para uma das sequências possíveis de investimentos.....	154
Quadro 5.11	Crescimento do espaço de estados do modelo.....	158





## SUMÁRIO

<b>RESUMO.....</b>	<b>xv</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>xvii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>xix</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>xxiii</b>
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	2
1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO.....	5
1.3.1 Objetivo geral.....	5
1.3.2 Objetivos específicos.....	5
1.4 INEDITISMO, ORIGINALIDADE E CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA.....	6
1.4.1 Ineditismo e originalidade.....	6
1.4.2 Contribuição científica.....	6
1.5 RELEVÂNCIA E MOTIVAÇÃO.....	7
1.6 LIMITAÇÕES.....	8
1.7 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	9
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>11</b>
2.1 EVOLUÇÃO DA LITERATURA.....	11
2.1.1 O modelo de Manne e seus sucessores.....	11
2.1.2 Substituição de equipamentos.....	17
2.1.3 Planejamento de produção.....	18
2.1.4 Problemas de localização (transporte).....	20
2.1.5 Teoria de opções reais.....	20
2.1.6 Teoria dos jogos.....	23
2.1.7 Processos de decisão Markovianos.....	29
2.1.8 Outras formulações.....	31
2.2 LITERATURA FOCO DESTA PESQUISA.....	35
2.2.1 Métodos de solução.....	35
2.2.2 Abordagens conceituais.....	37
2.2.3 O modelo de Murto et al.....	42
<b>3. FERRAMENTAL TEÓRICO.....</b>	<b>47</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	47
3.2 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA.....	47
3.2.1 Mecanismo e terminologia.....	47
3.2.2 Condições de validação de modelos.....	50
3.3 JOGOS DINÂMICOS COM INFORMAÇÃO COMPLETA.....	53

3.3.1	Introdução.....	53
3.3.2	O equilíbrio de Nash de um jogo multiestágio.....	54
3.3.3	Jogos sequências e a programação dinâmica reversa.....	55
3.3.4	Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo.....	56
3.4	EQUILÍBRIO PERFEITO DE MARKOV (EPM).....	58
3.4.1	Definição e existência de um EPM.....	59
3.5	EQUILÍBRIO ESPACIAL DE MERCADOS.....	62
3.5.1	Introdução.....	62
3.5.2	Equilíbrio na concorrência perfeita.....	66
3.5.3	Equilíbrio no monopólio.....	68
3.5.4	Equilíbrio no oligopólio.....	70
3.5.5	Mercados espaciais.....	76
3.5.6	Algoritmo geral para obtenção do equilíbrio espacial.....	87
4.	MODELO PROPOSTO.....	89
4.1	INTRODUÇÃO.....	89
4.2	CARACTERIZAÇÃO DO AMBIENTE.....	92
4.3	EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO.....	97
4.4	EQUILÍBRIO DE CURTO PRAZO.....	104
4.4.1	Premissas básicas do modelo de curto prazo.....	105
4.4.2	Formulação do modelo.....	108
4.5	O ALGORITMO DO MODELO PROPOSTO.....	116
5.	APLICAÇÃO NÚMERICA DO MODELO.....	119
5.1	INTRODUÇÃO.....	119
5.2	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	123
5.2.1	Considerações iniciais.....	123
5.2.2	Análise do modelo com simetria.....	126
5.2.3	Comparativo com uma estrutura sem espacialidade.....	130
5.2.4	Análise do modelo com assimetria.....	135
5.2.4.1	Assimetria nos custos logísticos.....	135
5.2.4.2	Assimetria na capacidade.....	144
5.2.4.3	Assimetria na probabilidade de decidir.....	148
5.2.4.4	Assimetria na economia de escala.....	151
5.2.5	Oligopólio com mais produtores.....	155
6.	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	161
6.1	CONCLUSÕES.....	161
6.2	RECOMENDAÇÕES.....	164
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	167
	APÊNDICE A - INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS.....	181
	A.1 INTRODUÇÃO.....	181

A.2 JOGOS NA FORMA EXTENSIVA.....	181
A.3 ESTRATÉGIA PURA E MISTA.....	183
A.4 DEFINIÇÃO DE EQUILÍBRIO DE NASH.....	184
<b>APÊNDICE B - O PROBLEMA DE INEQUAÇÃO</b>	
<b>VARIACIONAL.....</b>	<b>187</b>
B.1 INTRODUÇÃO.....	187
B.2 DEFINIÇÃO DE VIP.....	187
B.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES.....	189
B.4 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO.....	189
B.5 PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIDADE.....	190
B.6 PROBLEMAS DE PONTO FIXO.....	191
B.7 ALGORITMO PDS.....	194
<b>B.7.1 Condições de convergência.....</b>	<b>194</b>
<b>APÊNDICE C - SISTEMA COMPUTACIONAL PARA A</b>	
<b>OBTENÇÃO DA ESTRATÉGIA ÓTIMA DE EXPANSÃO DE</b>	
<b>CAPACIDADE – PROGRAMA FONTE .....</b>	<b>197</b>



# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A produção da indústria de transformação no Brasil cresceu em torno de 30% nos últimos 10 anos, acompanhando o crescimento do PIB, com exceção da crise de 2008 quando sofreu uma queda acentuada. Em meados de 2009 tornou a crescer, recuperando os níveis de produção de antes da crise de 2008 (Pastore et al., 2012). Apesar da estagnação que vem apresentando, a tendência é que a produção industrial acompanhe o crescimento do PIB em uma perspectiva de longo prazo. Este cenário de crescimento, na esteira do aumento da demanda interna, aliado ao acirramento cada vez maior da competição e o avanço tecnológico, reforça a importância de um componente do planejamento das empresas: a gestão da capacidade.

A gestão da capacidade das empresas tipicamente implica em um planejamento estratégico e um planejamento operacional e tático. O segundo hierarquicamente subordinado ao primeiro. As decisões associadas ao planejamento estratégico visam determinar a capacidade efetiva da operação produtiva, de forma a responder às flutuações da demanda ao longo do tempo. Uma vez definido a capacidade de longo prazo, ou seja, de dois ou mais anos, os gerentes das empresas devem determinar os ajustes de capacidade ou reconfigurações de tecnologia ou de mão de obra à medida que uma previsão mais acurada de demanda se torna disponível.

Segundo Slack et al. (2002), o planejamento operacional, portanto, é frequente e dinâmico de forma a acomodar flutuações da demanda no curto prazo, ou seja, até 24 meses.

Se determinar a adequada capacidade é considerado um dos componentes mais importantes no planejamento de qualquer empresa de manufatura ou de serviço, para alguns segmentos da indústria, tais como, de computadores, eletroeletrônicos, telecomunicação e farmacêutica, a gestão da capacidade é indiscutivelmente um dos fatores mais críticos de sucesso no longo prazo. Os produtos de alta tecnologia têm seus ciclos de vida encurtados com a introdução de novas tecnologias e, como consequência, o seu plano de expansão de capacidade deve ser reestruturado. O papel da gestão de capacidade é igualmente crítico em indústrias nas quais o custo de capital é significativo, tais como, nos segmentos de energia, siderurgia, óleo e gás, e outras indústrias pesadas. O foco deste trabalho é o planejamento estratégico da capacidade, ou seja, a gestão da capacidade

voltada para o longo prazo. A literatura sobre gestão da capacidade de longo prazo vem evoluindo continuamente desde os anos 50 e, em síntese, diz respeito a determinar o tamanho, o momento e, em algumas vezes, a localização de equipamentos ou facilidades a serem adicionados aos já existentes, para responder a uma demanda prevista ou estimada. Porém, nos últimos anos, em função de movimentos fundamentais ocorridos nos mercados, como a desregulamentação, globalização, o acirramento da competição, o avanço tecnológico e o encurtamento do ciclo de vida dos produtos, foi preciso incorporar aos modelos características que refletissem tais mudanças.

O modelo adotado nesta pesquisa procura essencialmente contribuir para este fim, buscando reduzir, ainda mais, o espaço vazio que há na literatura entre a perspectiva econômica e a perspectiva organizacional no processo decisório das empresas para a expansão de capacidade, ou seja, criando pontes de ligação entre a teoria econômica, teoria dos jogos e a pesquisa operacional.

## 1.2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Segundo Giglio (1970), a capacidade de uma instalação é a sua taxa máxima de produção. Entende-se por instalação uma unidade de produção, equipamento, máquina, fábrica ou serviço. Expansão de capacidade, por sua vez, é o processo de acrescentar módulos similares às instalações existentes ao longo do tempo para atender uma demanda crescente aos seus serviços (Davis et al., 1987). Mieghem (2003) afirma que enquanto capacidade refere-se a estoques de recursos, investimento refere-se às mudanças destes estoques ao longo do tempo. Portanto, pode-se afirmar que uma política de expansão de capacidade implica em decisões de investimentos em sequência no tempo e, muitas vezes, discretas em quantidades, para atender uma demanda futura.

Uma corrente da literatura define a decisão de investimento como sendo o ato de incorrer em um custo imediato na expectativa de ganhos futuros (Pindyck, 1988). A maioria das decisões de investimento tem em comum entre si três importantes características. Primeiro, os custos de investimento são parcialmente ou totalmente irreversíveis, ou seja, o custo de investimento, uma vez realizado, não é totalmente recuperável caso se queira reverter a decisão. Por exemplo, investimentos em marketing e propaganda são específicos e não podem ser recuperados, portanto, são investimentos irreversíveis. Segundo, sempre existe uma incerteza a cerca dos ganhos futuros desse investimento. O máximo que se pode fazer é avaliar as probabilidades de diversas alternativas de

resultados. Uma terceira característica é a possibilidade de se decidir não realizar o investimento. Ou seja, pode-se postergar o investimento para que se possa obter mais certeza a cerca do futuro (Dixit e Pindyck, 1994).

Em se tratando de expansão de capacidade, uma forma de minimizar problemas associados a estas características de investimento seria expandir em pequenas unidades e, conseqüentemente, com maior frequência. Mas a maioria das vezes é indesejável ou impossível estabelecer uma política de variação da capacidade de modo a atender exatamente a demanda que varia ao longo do tempo. Em geral os custos de investimentos em expansão de capacidade apresentam consideráveis economias de escala, ou seja, o custo médio por unidade de capacidade acrescida às instalações existentes decresce na medida em que se considera uma expansão maior.

Em um ambiente sem competição o problema básico resume-se em confrontar os benefícios da economia de escala das expansões de grande porte, e possivelmente minimizar as chances de falta de capacidade ou excesso de demanda, com os custos de oportunidade de se realizar várias expansões menores ao longo do tempo garantindo, em contrapartida, o atendimento da demanda sem operar com capacidade ociosa. O problema clássico de expansão de capacidade consiste, portanto, em determinar os tamanhos adequados das expansões e os momentos certos ao longo do tempo em que estas expansões deveriam ser realizadas para atender uma demanda, determinística ou não, que geralmente cresce ao longo de tempo. O objetivo é minimizar o custo total envolvido ou maximizar o lucro total da empresa, atualizado ao momento presente por uma taxa mínima de atratividade de investimento, a qual se chama de taxa de desconto.

Em outras estruturas de mercado, entretanto, uma quarta característica do processo decisório de investimento deve ser levada em consideração: a competitividade. Sejam em um ambiente de competição perfeita ou de um oligopólio as empresas realizam investimentos por razões estratégicas. O que distingue decisões de investimentos estratégicos de outros tipos de investimentos é que tais decisões são tomadas levando em consideração a reação de outros jogadores rivais e o respectivo impacto destas reações na lucratividade da empresa ao longo do tempo. Exemplos de trabalhos que consideram tal premissa são apresentados em Gilbert e Harris (1984), Mills (1990), Grenadier (1999), Mieghem e Dada (1999), Murto et al. (2004), Bushnell e Ishii (2007), entre outros. Estes estudos em geral tratam isoladamente cada estrutura competitiva, ou seja, definem modelos distintos para um

oligopólio, competição perfeita e monopólio. Há, ainda, situações em que um ou mais produtores abastecem mercados consumidores separados espacialmente. Esta distância geográfica entre mercados pode implicar em diferentes estruturas competitivas em função dos custos envolvidos para atender mercados distantes. Tais mercados podem ter características competitivas diferentes e os custos de transporte para atendimento a estes mercados podem afetar a política de expansão das empresas. Em outras palavras, um produtor pode agir como monopolista para determinado mercado e, para outros mercados ser um jogador de um oligopólio ou até de um ambiente de competição perfeita.

As interações entre estas cinco características, ou seja, a irreversibilidade, incerteza, flexibilidade, competitividade e a espacialidade do mercado, ocorrem no processo decisório das empresas com maior ou menor intensidade, dependendo basicamente da situação real em que se está representando.

Face ao exposto, colocam-se as seguintes questões:

**“Em se tratando de mercados produtores e consumidores distribuídos espacialmente, até que ponto os custos logísticos influenciam na estratégia de expansão?”**

**“Qual o comportamento das empresas quando competem entre si em duas dimensões: por capacidade, no longo prazo, e em nível de produção, no curto prazo?”**

**“O quão a habilidade de uma empresa em estar atenta às necessidades do mercado impacta na competição e em sua estratégia de expansão?”**

**“Como determinar a estratégia ótima de expansão de capacidade e produção, considerando diferentes estruturas competitivas de um mercado espacialmente distribuído?”**

**“Qual a vantagem que uma empresa já estabelecida no mercado tem sobre empresas entrantes?”**

Estas questões devem ser respondidas através da elaboração de um modelo de expansão de capacidade que permite considerar o impacto de mercados distribuídos espacialmente atendidos por empresas produtoras que competem entre si em basicamente duas dimensões: no longo prazo, objetivando estrategicamente aumentar a sua participação



no mercado com o aumento de sua capacidade relativa, e no curto prazo, com o objetivo de gerar lucros e garantir sua sustentabilidade.

### **1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO**

#### **1.3.1. Objetivo Geral**

Este trabalho tem como objetivo geral investigar, propor e implementar um modelo que determina a política ótima de expansão de capacidade de empresas inseridas em diferentes estruturas de mercados espacialmente distribuídos, considerando situações de competição perfeita, monopólio e oligopólio.

#### **1.3.2. Objetivos Específicos**

Para que o objetivo geral deste trabalho seja atingido os seguintes objetivos específicos devem ser atendidos:

- Desenvolver e implementar o modelo de equilíbrio espacial de preços em mercados de competição perfeita, oligopólios e monopólios.
- Desenvolver e implementar o modelo de expansão de capacidades, considerando o equilíbrio espacial de preços.
- Aplicar o modelo proposto a um exemplo numérico teórico de forma a ilustrar o uso do algoritmo, validar as premissas adotadas e verificar o impacto de variações em parâmetros sobre a solução obtida.
- Analisar a influência da intensidade da competição nas decisões de expansão de capacidade das empresas.
- Analisar o quanto a incerteza, inerente ao jogo competitivo das empresas influencia na suas políticas ótimas.
- Comparar os resultados do modelo proposto com e sem o efeito da distribuição espacial dos mercados.

## 1.4. INEDITISMO, ORIGINALIDADE E CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA

### 1.4.1. Ineditismo e originalidade

Esta pesquisa baseia-se em uma ampla revisão bibliográfica de artigos científicos disponíveis na literatura relacionados ao problema de expansão de capacidade de produção. Foram considerados trabalhos publicados nos idiomas inglês, espanhol e português. Várias abordagens conceituais do problema são identificadas e relatadas. Contudo, o trabalho da presente pesquisa procura explorar uma lacuna teórica identificada na referida literatura. Problemas de expansão de capacidade envolvendo múltiplas localidades têm sido estudados há vários anos, porém, estes trabalhos não consideram, em conjunto, a irreversibilidade dos investimentos, a incerteza e a competição entre as empresas em um mercado espacialmente distribuído. O presente estudo, portanto, propõe um modelo de expansão de capacidade que considera o impacto dos custos logísticos nas decisões de investimentos em capacidade quando a empresa produtora necessita atender mercados distribuídos geograficamente, que podem apresentar, inclusive, diferentes estruturas competitivas, ou seja, competição perfeita, monopólio e/ou oligopólio.

### 1.4.2. Contribuição Científica

Entende-se que além da contribuição científica explícita nas características inéditas do modelo, mencionado na seção anterior, o trabalho procurou resgatar através de uma ampla pesquisa bibliográfica as contribuições mais relevantes da literatura de expansão de capacidade dos últimos 50 anos, enfatizando a evolução dos modelos ao longo do tempo. O trabalho buscou sua fundamentação teórica em várias correntes da literatura, algumas delas já bastante utilizadas e outras ainda muito pouco exploradas para este tipo de problema. São as seguintes as principais abordagens teóricas utilizadas neste trabalho:

- Programação Dinâmica
- Teoria de Opções Reais
- Teoria dos Jogos e Equilíbrio de Cournot-Nash
- Processos de Decisão Markoviano e Equilíbrio Perfeito de Markov
- Teoria da Inequação Variacional

- Equilíbrio Espacial de Preços

Desta forma, a importância acadêmica do trabalho pode também ser vista na integração de várias abordagens da literatura buscando contribuir para a criação de pontes entre diversas correntes teóricas no processo decisório de expansão de capacidade das empresas no longo prazo.

### 1.5. RELEVÂNCIA E MOTIVAÇÃO

Investimentos em instalações e em equipamentos são empreendimentos que envolvem um alto comprometimento de capital das empresas. Em geral, trata-se de decisões complexas associadas a custos que se tornam parcial ou totalmente irreversíveis logo após o projeto ser iniciado. Muitas dessas decisões são tomadas diante de situações de incerteza sobre o real retorno do investimento. Em alguns casos, existe a possibilidade da empresa esperar até que informações mais fidedignas a respeito de estimativas que fundamentam as decisões possam ser obtidas.

Segundo Luss (1982), desde o fim da década de 50 que o problema de gestão da capacidade tem sido um dos focos de atenção das empresas. Aplicações de expansão de capacidade são registradas na literatura em diversos setores, tais como, os de transportes, geração de energia, construção civil, siderúrgico, químico, petroquímico e em serviços públicos como hospitais, escolas, sistemas de água e esgoto e sistemas de coleta de lixo.

Como afirma Karabuk e Wu (2003), a gestão de capacidade em uma empresa é de tal relevância que faz parte do planejamento estratégico, refletindo, desta forma, nas ações de médio e curto prazo.

Para Wu et al. (2005), o papel da gestão da capacidade nos setores da indústria intensivos em capital é ainda de maior importância. Os autores destacam que em indústrias de alta tecnologia, como já afirmado na introdução deste trabalho, tais como as de eletrônica, semicondutores, telecomunicação e farmacêutica, a habilidade para gerir de forma eficiente a capacidade passa a ser o maior fator de sucesso da empresa a longo prazo. Wu et al. (2005) citam ainda alguns dados que dão uma boa visão do comprometimento médio de capital destes investimentos em alguns setores. O custo médio de uma fábrica de semicondutores é em torno de 1 a 4 bilhões de dólares e o preço de aquisição de uma única máquina pode chegar a 5 milhões de dólares.

Para a construção de uma fábrica padrão para a produção de remédios no setor farmacêutico, o investimento necessário gira em torno de 200 a 500 milhões de dólares.

Características particulares de setores de alta tecnologia potencializam a importância de uma adequada gestão da capacidade. A acirrada competitividade entre empresas implica na necessidade de constante inovação. Por sua vez, a introdução acelerada de inovações no mercado, reduz o ciclo de vida e leva à rápida obsolescência dos produtos. Tais empresas necessitam planejar a capacidade de sua cadeia de suprimentos para atender a demanda de novos produtos enquanto buscam maximizar o retorno dos investimentos realizados em produtos já maduros no mercado.

Segundo Garcia e Shen (2010), o desenvolvimento econômico dos países é extremamente dependente do desempenho de setores de infraestrutura, tais como, o de energia, refinarias de óleo e transporte de gás. Em empresas de tais setores, a decisão de manter certo nível de excesso de capacidade é socialmente recomendável, dado que é uma proteção contra variações inesperadas das condições de mercado, porém, não é necessariamente compatível com a real estratégia de empresas que competem nestes mercados. Estas se inserem, atualmente, em ambientes oligopolizados e decisões de expansão de capacidade têm agora novas implicações estratégicas que podem conflitar com o desejável socialmente, ou seja, com certo nível de capacidade ociosa que minimize o risco de falta de oferta. Modelos de análise de expansão de capacidade podem contribuir para o estabelecimento de políticas públicas para estes setores e para outros de similar criticidade.

Embora a literatura de expansão de capacidade tenha evoluído muito ao longo dos anos, muitas lacunas ainda estão por serem exploradas.

Face ao exposto, considera-se de extrema relevância trazer à tona a discussão sobre modelos de investimentos em expansão de capacidade, razão desta pesquisa, que contemplem várias empresas competindo em mercados distribuídos espacialmente, visto que os modelos de expansão de capacidade existentes, em geral, são falhos por não considerarem a influência da espacialidade na competitividade das empresas.

## 1.6. LIMITAÇÕES

O modelo de expansão da capacidade de produção proposto nesta tese não foi aplicado a um estudo de caso. A aplicação do modelo

limitou-se a um exemplo numérico teórico. Em função disso, não foi possível validar o funcionamento do modelo com dados reais que certamente trariam conclusões adicionais. Contudo, a aplicação do modelo permite analisar qualitativamente o comportamento das empresas diante de diferentes premissas e configurações de mercados.

A modelagem de um problema real de expansão de capacidade pode exigir um nível de detalhamento maior de forma a contemplar fatores que não foram considerados no modelo proposto. Neste sentido, a não incorporação de variáveis tais como, restrição ao crédito das empresas, aspectos político-econômicos, riscos relacionados à segurança e possíveis ações de sindicatos podem ser considerada como limitações deste trabalho. Por razões de simplificação o modelo proposto não leva em consideração a possibilidade de novos entrantes durante o horizonte de planejamento, dado que se assume um mercado com severas barreiras para novos jogadores. Por fim, assume-se que a premissa de demanda determinística pode ser considerada, também, como uma limitação deste trabalho caso queira-se expandir a aplicação do modelo a outros mercados, que não o mercado de commodities. Mercados intensivos em tecnologia, por exemplo, têm um grau relativamente alto de incerteza da demanda, em função de vários aspectos, entre eles uma alta taxa de obsolescência.

## 1.7. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é subdividido em seis capítulos. No capítulo 2 é realizada uma revisão da literatura e a evolução bibliográfica dos modelos de expansão de capacidade, desde os anos 50. Dentre as várias correntes da literatura de expansão de capacidade relatadas neste trabalho foi identificado o foco da presente pesquisa.

No capítulo 3, é apresentado o arcabouço teórico deste trabalho. São introduzidos os conceitos fundamentais e técnicas disponíveis para a elaboração do modelo proposto.

No capítulo 4 é apresentado o modelo matemático, objetivando solucionar o problema de expansão de capacidade em mercados espaciais e a proposta de um algoritmo para a determinação da estratégia ótima de expansão, assim como, os níveis de produção e fluxo para os mercados consumidores.

No capítulo 5, o modelo matemático é aplicado a um exemplo numérico teórico, que muito se assemelha ao utilizado por Murto et al. (2004). Os resultados para várias configurações de parâmetros são

analisados e conclusões qualitativas do comportamento das empresas diante de vários cenários são apresentadas.

O capítulo 6 apresenta as conclusões finais da presente pesquisa e as recomendações para trabalhos futuros.

Finalmente as referências bibliográficas e os apêndices são apresentados.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **2.1. EVOLUÇÃO DA LITERATURA**

#### **2.1.1. O modelo de Manne e seus sucessores**

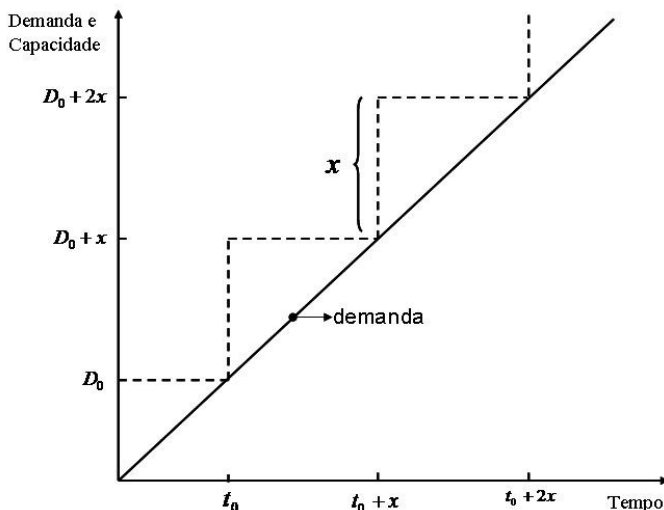
Desde os anos 50 muitos estudos sobre problemas de expansão de capacidade têm sido elaborados. De acordo com Luss (1982), dado um padrão conhecido da demanda, o problema básico consiste, em geral, em determinar (a) o tamanho; (b) o momento e (c) a localização (e/ou tipos de capacidade) de expansões em um dado período de planejamento que minimizem o valor presente de um fluxo de custos associados a estes investimentos, descontados a uma taxa de juros.

As primeiras abordagens da literatura para problemas de expansão de capacidade, com decisões tomadas ao longo do tempo, baseavam-se na teoria do controle estocástico, tais como em Manne (1961), Giglio (1970), Freidenfelds (1980) e, mais tarde, Bean et al. (1992). Estes estudos utilizaram uma abordagem de transformar o problema estocástico de expansão de capacidade em um problema determinístico equivalente. Manne (1961) mostrou que quando a demanda é um movimento Browniano no qual as taxas de transição não dependem do tempo e do estado em que se encontra o processo, o efeito da incerteza é idêntico a uma redução na taxa de desconto. Giglio (1970) propõe um algoritmo que faz uso de resultados determinísticos apresentados em Manne (1961) para obter uma solução aproximada. Freidenfelds (1980), assumindo que a demanda é um processo estocástico de nascimento e morte e que custos de expansão ocorrem no momento do investimento, afirma que o problema de demanda determinística equivalente pode ser estabelecido prontamente. Posteriormente, Bean et al. (1992) generalizam o modelo de Manne, relaxando diversas premissas impostas pelo seu modelo. Em tais modelos, geralmente com o tempo contínuo, considera-se a demanda como um processo estocástico simples de forma a tornar a solução matematicamente tratável.

O trabalho pioneiro de Manne (1961), mencionado anteriormente, considerado pela literatura um dos mais notáveis estudos de expansão de capacidade é focado na indústria pesada. O modelo explora a relação custo-benefício entre a economia de escala que expansões de grande porte proporcionam e o custo de oportunidade de investir em capacidade de instalação bem antes que esta capacidade seja plenamente demandada. Mane baseou-se no modelo de Chenery (1952), que já

levava em conta economias de escala, e tinha as seguintes características: (1) a demanda é determinística e cresce linearmente com o tempo; (2) o horizonte de planejamento é finito; (3) as instalações têm uma vida econômica infinita; (4) a cada vez que a demanda consome toda a capacidade existente, imediatamente  $x$  unidades de nova capacidade são instaladas. Em seu modelo, Manne (1961) considerou um horizonte de tempo infinito e acrescentou algumas generalizações ao modelo de Chenery: (a) a demanda pode também seguir uma distribuição de probabilidade do tipo “random walk”; (b) se a demanda não for satisfeita, pode ser acumulada (formando o que chama-se de *backlog* da demanda) para ser atendida no futuro a um custo adicional como uma forma de penalidade. Por questões de simplificação a versão determinística do modelo de Mane considera ainda que a unidade física de capacidade seja equivalente a exatos um ano de crescimento da demanda. Assim, em  $x$  anos toda a capacidade inicialmente disponível é consumida e renovada com a instalação de outras  $x$  unidades de capacidade, em um ciclo que se repete a cada  $x$  anos, conforme ilustrado na figura 2.1.

**Figura 2.1** – consumo da capacidade com o crescimento da demanda.



Fonte: adaptado de Manne (1961).



No modelo, os custos de instalação de capacidade são representados por uma função exponencial  $kx^\alpha$ , onde  $\alpha$  é uma constante de economia de escala, sendo,  $0 < \alpha < 1$  e  $k > 0$ .

A economia de escala implícita na função citada anteriormente pode ser interpretada através de um exemplo hipotético. Se  $\alpha = 1/2$ , a função de custo indica que uma instalação que atender pelo equivalente a 16 anos o crescimento da demanda, custa somente duas vezes mais que outra instalação que atende pelo equivalente a 4 anos. A existência desta economia de escala estimula uma expansão de porte considerável, antecipando o crescimento da demanda. Porém, o quanto a expansão deve ser antecipada? Para esta decisão, a taxa de desconto dos custos futuros é crucial. Sem o desconto de valores futuros, seria plausível gastar um dólar hoje para deixar de gastar a mesma quantia em um ano, em dez ou em cem anos. Não existe limite para o tamanho da expansão de capacidade a ser realizada hoje, com taxa de desconto zero. Entretanto, considerando-se o desconto de valores futuros para o momento presente, segundo uma taxa de desconto, a afirmação de que não existe limite para a expansão de capacidade não é necessariamente válida.

Considerando o comportamento cíclico do modelo, ilustrado na figura 2.1, diz-se que  $C(x)$  é uma função de  $x$  que representa a soma dos custos futuros a partir de um ponto de regeneração, ou seja, nos pontos  $t_0 + x$ ,  $t_0 + 2x$ , e assim por diante. A função  $C(x)$  é dada pela equação recursiva a seguir.

$$C(x) = kx^\alpha + e^{-rx} C(x)$$

O primeiro termo do lado direito do sinal de igualdade representa os custos de instalação incorridos no início do ciclo atual. O segundo termo representa a soma de todos os custos de instalação incorridos nos ciclos subsequentes e descontados do início do ciclo seguinte ao momento presente, ou seja, descontados de um intervalo de  $x$  anos. A expressão  $e^{-rt}$  representa o valor presente de uma unidade monetária gasto em  $t$  anos no futuro utilizando uma taxa de desconto  $r$ . Assim sendo, têm-se:

$$\frac{C(x)}{k} = \frac{x^\alpha}{1 - e^{-rx}}$$

Derivando o log de  $C(x)$  com relação a  $x$  e igualando a zero:

$$\frac{d \log C(x)}{dx} = \frac{\alpha}{x} - \frac{re^{-rx}}{1 - e^{-rx}} = 0$$

ou,

$$\alpha = \frac{rx^*}{e^{rx^*} - 1}$$

Onde  $x^*$  é o tamanho ótimo da expansão.

O autor mostrou que o valor ótimo de  $x$  aumenta quando a constante  $\alpha$  decresce, ou seja, quando há maior economia de escala. Por outro lado, o valor ótimo de  $x$  diminui quando  $r$  decresce.

A versão probabilística do modelo de Manne, um tipo particular de uma demanda não estacionária se aproxima do clássico problema da “ruína do jogador” e, assim sendo, utiliza-se da transformação de Laplace para simplificar o tratamento probabilístico. Manne mostrou que o problema estocástico, em modelos em que insuficiência de capacidade não é permitida, pode ser transformado em um problema determinístico equivalente, substituindo a taxa de desconto do fluxo de caixa por uma função decrescente da variância,  $\sigma^2$ , do processo estocástico da demanda. Assim sendo, todo o efeito da incerteza é captado por uma simples variável: a taxa de desconto modificada ou equivalente e dada por  $r^* = (\sqrt{1 + 2r\sigma^2} - 1)/\sigma^2$ , onde  $r^*$  é a taxa livre de risco. O autor conclui que a incerteza induz a custos esperados mais altos e estimula investimentos de maior porte em cada expansão. Este clássico artigo de Manne estimulou vários estudos sobre expansão de capacidade na década de 60 e 70.

Nesta época os métodos para planejamento de expansão de capacidade eram basicamente restritos a modelos com múltiplas localidades, porém estático no tempo, ou com poucas localidades e dinâmicos no tempo. Os trabalhos de Manne (1967) e Erlenkotter (1967) consideraram, provavelmente pela primeira vez, várias regiões de produção para o problema de expansão no qual a localização ótima para cada expansão era uma variável do problema. Posteriormente, Erlenkotter (1974, 1975) aplica um modelo de expansão de capacidade com várias localizações em um ambiente dinâmico na indústria de

fertilizantes da Índia. Dois métodos foram utilizados pelo autor que os chamou de abordagens aproximadas e incompletas da programação dinâmica, respectivamente.

Rao e Rutenberg (1977) desenvolveram também um modelo com várias localizações. Considerando-se uma sequência de localizações para expansão como dada, o problema resume-se em determinar o momento e o tamanho da expansão de forma a atender uma demanda crescente, minimizando o valor presente dos custos fixos, custos de operação e de transporte. Rao e Rutenberg (1977) testaram o algoritmo para a indústria de fertilizantes da Índia e compararam com os resultados obtidos por Erlenkotter (1975).

Fong e Srinivasan (1986) provêem uma solução heurística para o problema de expansão de capacidade com várias localizações. O modelo considera custos de transporte, horizonte de planejamento finito, demanda não necessariamente crescente no tempo e a possibilidade de importação para atender a demanda. Diferentemente do modelo de Rao e Rutenberg (1977), o modelo permite várias expansões simultaneamente. Klinecicz, Luss e Yu (1988) apresentaram um modelo com várias localizações que combina decisões de localização (abertura, fechamento e expansão) e alocação de demanda entre as instalações.

Modelos de expansão de capacidade foram largamente aplicados em serviços públicos, tal como, na indústria telefônica, como apresentado em Yaged (1973), Freidenfelds e McLaughlin (1979), Smith (1979), Freidenfelds (1980), Smith (1980) e Bean e Smith (1985). Neste segmento, a principal decisão consiste em determinar o tamanho, o momento e a localização de uma expansão de capacidade de linhas de transmissão de uma rede telefônica e o adequado roteamento da demanda na rede para cada ano.

Modelos de expansão de capacidade também foram elaborados para aplicação no fornecimento de energia elétrica e recursos hídricos, conforme apresentado em Bessière (1970), Freidenfelds (1980), Erlenkotter et al. (1989), Matsumoto et al. (1989), Bean et al. (1992) e Smith e Villegas (1997) e em investimentos em estradas e escolas (Luss, 1982). Smith e Villegas (1997) apresentam um estudo comparativo entre vários modelos de expansão de capacidade do segmento de energia elétrica existente na literatura. Entre os resultados obtidos pelo estudo é destacada a importância de se considerar a interdependência entre os projetos de hidrelétricas no modelo de expansão de capacidade. Freidenfelds (1980) apresenta um modelo com demanda Markoviana representada por um processo estocástico de nascimento e morte com

probabilidades de transição estacionárias. Bean et al. (1992) apresenta um modelo de expansão de capacidade com uma demanda se comportando segundo um processo semi-Markoviano. Os autores mostram que o problema equivalente determinístico sempre existirá quando a demanda é um processo seguindo um movimento Browniano transformado ou um processo regenerativo de nascimento e morte. O problema utiliza uma taxa de juros equivalente mais baixa e a demanda determinística equivalente é calculada através de uma regressão linear da demanda observada.

Neebe e Rao (1986) formularam um problema de caminho mais curto e um método de relaxamento Langrangeano para determinar sequências de expansões de capacidade assumindo uma demanda determinística.

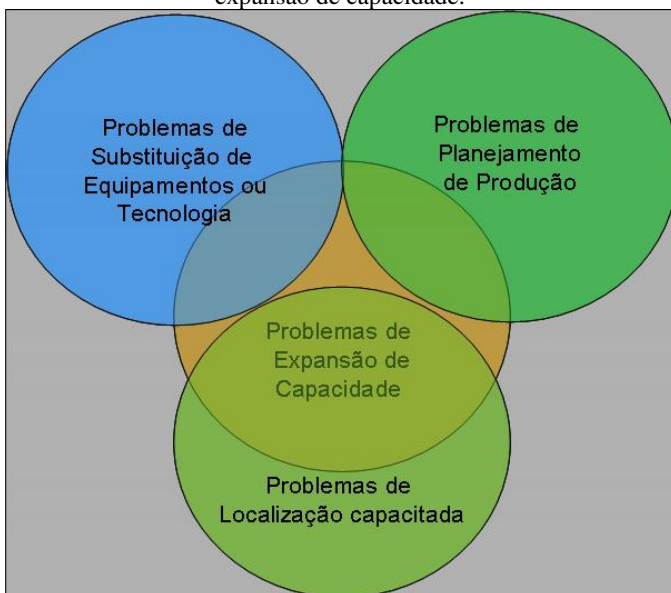
Davis et al. (1987) apresentam um modelo de expansão de capacidade introduzindo duas inovadoras características: a demanda crescente em quantidades discretas porém aleatoriamente no tempo e expansões de capacidade não instantâneas, ou seja, o tempo para expandir é uma variável estocástica que depende da taxa de investimento, uma variável controlada pelo tomador de decisão. Tão logo a margem do investimento acumulada atinja o preço randômico de uma unidade discreta de capacidade, a referida unidade é instalada. Os autores modelaram o problema de expansão de capacidade como um processo de controle estocástico e o testaram em casos simples.

Na indústria química, Lieberman (1987, 1989), analisou modelos clássicos de expansão de capacidade existentes à época, utilizando dados históricos de 20 a 25 anos. Lieberman buscava respostas às seguintes questões: empresas empreendem expansões de capacidade de maior porte quando a indústria cresce mais rapidamente? Novos entrantes da indústria tendem a construir fábricas menores do que as empresas já estabelecidas? Que fatores realmente influenciam o tamanho de novas fábricas e determinam o tamanho ótimo ao longo do tempo? Lieberman (1989) relatou evidências que decisões de expansão de capacidade feitas pela indústria química foram diferentes daquelas preconizadas pelo modelo de Manne, sugerindo, portanto, que o referido modelo pode ser inapropriado para aplicação na indústria química.

Paraskevopoulos et al. (1991) aplicam um modelo de expansão de capacidade à indústria de PVC. Os autores propõem uma abordagem determinística ao problema de expansão de capacidade, porém, incorporam uma penalidade sobre a sensibilidade da função objetiva a vários tipos de incerteza.

Os modelos de expansão de capacidade cujas decisões são tomadas na perspectiva do tempo são chamados na literatura de modelos dinâmicos, ou seja, não se limitando apenas a um único investimento, e sim a uma sequência de investimentos ao longo do tempo. Segundo Luss (1982) estes problemas são muito próximos a problemas de estoque, localização de instalações e substituição de equipamentos, embora importantes diferenças existam entre tais problemas e o problema de expansão de capacidade. As próximas três seções a seguir apresentam alguns trabalhos que unem as respectivas correntes com a literatura de expansão de capacidade, conforme apresentado na figura 2.2.

Figura 2.2 – Combinação de outros problemas com o problema de expansão de capacidade.



Fonte: elaborado pelo autor.

### 2.1.2. Substituição de equipamentos

Com o desenvolvimento tecnológico acelerado, especialmente a partir da década 90, novos equipamentos e opções tecnológicas tornaram-se disponíveis para as empresas. Problemas de substituição de equipamentos concentram-se em determinar quando instalações

existentes devem ser substituídas por novas, por razões, basicamente, de ineficiência e custos altos de manutenção de equipamentos antigos e a disponibilidade de novas tecnologias (Luss, 1982). Portanto, modelos que combinem decisões de substituição de equipamentos com expansão de capacidade são logicamente de interesse em determinadas situações.

Rajagopalan et al. (1998) e Li e Tirupati (1994) desenvolveram modelos que uniram mais de uma corrente da literatura, tais como, decisões de adoção de uma nova tecnologia, substituição de máquinas e expansão de capacidade. Rajagopalan et al. (1998) uniram as correntes da literatura que estudam o momento de substituição de equipamentos e expansão de capacidade. Li e Tirupati (1994), por sua vez, consideraram o problema de expansão de capacidade e escolha de tecnologia em um ambiente caracterizado por múltiplos produtos, demandas dinâmicas e determinísticas em um horizonte de planejamento finito. O objetivo era avaliar a opção por tecnologias flexíveis ou dedicadas, assim como o tamanho e o momento de expansões de capacidade. Os autores consideraram o problema em que uma sequência de rompimentos tecnológicos é prevista, porém, o momento e sua magnitude são incertos. As empresas devem decidir sobre o quanto de capacidade da atual tecnologia devem adquirir para atender a um crescimento da demanda ou ainda se devem substituí-la. Uma demanda não atendida, chamada de residual, é considerada como um input do modelo.

Hsu (2002) apresenta um modelo de expansão de capacidade que prevê a existência de uma demanda residual não atendida, tal como em Rajagopalan et al. (1998) e prevê, por isto, penalidades na função objetiva. Esta demanda pode ser atendida por contratos de leasing ou por terceirização. Tais decisões são tomadas preferencialmente, segundo o autor, por motivos especulativos, ou seja, a aquisição de uma nova tecnologia pode ser postergada em função da expectativa que se torne mais barata em um futuro próximo. O objetivo do modelo é minimizar os custos de aquisição, manutenção e operação associados à expansão de capacidade ao longo do tempo, em um horizonte de planejamento finito.

### **2.1.3. Planejamento da produção**

Ao contrário dos problemas específicos de estoque, políticas de expansão de capacidade normalmente são elaboradas na perspectiva de um horizonte de planejamento mais longo, por exemplo, de 5, 10 ou 20 anos. Assim sendo, economias de escala e o fluxo de caixa descontado ao valor presente são pontos extremamente importantes nesta categoria de problemas. Os problemas de estoque, por outro lado, são

relacionados ao fluxo de material na cadeia de suprimentos e são tratados em um horizonte de planejamento relativamente pequeno (Luss, 1982). Mieghem (2003) também aponta o planejamento da produção, entre outras ramificações da literatura, como tendo relação direta ou indireta com o problema de expansão de capacidade e afirma que em modelos de apenas um período não existem diferenças essenciais entre as duas categorias de problema. Exemplos de modelos de estoque que consideram a capacidade são encontrados em Zangwill (1966), Angelus e Porteus (2002) e Mieghem e Rudi (2002).

Bradley e Arntzen (1999), Rajagopalan e Swaminathan (2001), e Atamtürk e Hochbaum (2001) também exploram a expansão de capacidade na perspectiva do planejamento da produção. Bradley e Arntzen (1999) apresentam um modelo de programação inteira mista cuja função objetivo é maximizar o retorno sobre os ativos. Os autores ilustram os prós e contras entre decisões de capacidade e estoque aplicando o modelo a duas empresas. Atamtürk e Hochbaum (2001) estudam os prós e contras entre decisões de aquisição de capacidade adicional, subcontratação de produção e manter estoque para atender a uma demanda determinística e não estacionária para um único período de tempo, em um horizonte de tempo finito. Rajagopalan e Swaminathan (2001), por sua vez, analisam o problema de uma empresa de bens de consumo, com vários produtos onde as demandas desses itens são conhecidas, variando ao longo do tempo, mas tendo flutuações de curto prazo. É proposto um método de solução que utiliza a programação matemática para otimizar o tamanho da expansão, o nível de produção e de estoque ao longo do tempo.

De acordo com Mieghem (2003), o planejamento da produção utiliza-se normalmente de dados determinísticos da demanda, para cada período do horizonte de planejamento. Para considerar o efeito da incerteza normalmente esta corrente da literatura faz duas sugestões: realizar análises de sensibilidade alterando os parâmetros utilizados no planejamento e usar estoque de segurança ou, por segurança, usar capacidade em excesso para satisfazer uma demanda eventualmente mais alta que a prevista. Ainda segundo Mieghem (2003), é desejável, porém, incorporar os efeitos da incerteza no próprio modelo, pois, assim sendo, este automaticamente incorporará a análise de sensibilidade das variáveis de natureza estocástica e, endogenamente, produzirá a solução ótima considerando fatores de segurança.

### **2.1.4. Problemas de localização (transporte)**

Problemas de localização cujas variáveis de decisão incluem o tamanho de instalações são ditos problemas de localização capacitados e podem ser vistos como problemas de expansão de capacidade (Luss, 1982). No planejamento de capacidade de fábricas, a localização é em geral uma variável importante. Se a produção é destinada para outros locais distantes da fábrica, haverá um custo de transporte. O problema é determinar a localização ótima, o tamanho ótimo da expansão e o momento ótimo para expandir de forma a minimizar os custos de investimento e transporte. Segundo Dias e Captivo (2001), um problema de localização dinâmico capacitado é basicamente um problema de expansão de capacidade na medida em que busca identificar a localização de instalações ao longo de períodos de tempo, aumentando a capacidade disponível total a fim de atender a uma demanda crescente. Manne (1967), Erlenkotter (1967) e Freidenfelds (1981) são alguns exemplos de estudos de expansão de capacidade com múltiplas localidades, considerando o horizonte de planejamento infinito. Rao e Rutenberg (1977) e Fong e Srinivasan (1986), consideraram em seus estudos um horizonte de tempo finito. O modelo de Dias e Captivo (2001) considera a localização de novas instalações e expansões de instalações já existentes.

Com o rápido desenvolvimento tecnológico e a globalização dos mercados, decisões de investimentos passaram a ser consideradas em um contexto de alta incerteza e intensa competitividade. Novas correntes da literatura que abarcam tais fatores em seus arcabouços teóricos passam a ser utilizadas na modelagem de problemas de expansão de capacidade de produção, conforme será visto nas seções seguintes.

### **2.1.5. Teoria de opções reais**

Normalmente decisões de investimentos em capacidade são realizadas diante de grandes incertezas e condições de irreversibilidade. Se o investimento não afetar outros projetos ou a demanda de mercado, a teoria de opções reais pode ser aplicada diretamente para determinar o tempo ótimo de investimento.

Na teoria de investimentos irreversíveis (Dixit e Pindyck, 1994), a opção de investimento é análoga à opção americana de compra de uma ação na bolsa de valores, na qual o ativo fundamental da opção real é o valor presente do investimento e o preço da opção é igual ao custo irreversível do investimento. Portanto, a opção real tem as mesmas



propriedades de uma opção financeira e a estratégia ótima é selecionar o momento e o porte do investimento que maximiza o valor da opção real. Em outras palavras, quando um investimento é irreversível e a demanda é incerta, o ato de investir implica na perda da opção de investir em qualquer momento do futuro. Contudo, o mais conhecido resultado desta emergente literatura é a invalidação da regra de análise de investimento do valor presente. Esta regra afirma que todo investimento é atrativo se o valor presente do seu fluxo de caixa é não negativo. Se existe uma incerteza quanto ao valor futuro de um ativo, existirá, em contrapartida, um custo de oportunidade de investir hoje neste ativo. Este custo refere-se ao que se chama de “opção de esperar”. Assim, a regra de decisão é investir quando o valor do investimento excede o custo de sua realização por um valor potencialmente grande. A analogia à teoria de opções de mercados financeiros é, portanto, direta. Por isso, esta abordagem passa a ser chamada de teoria de opções reais, por se tratar de opções de ativos reais. O nome opções reais foi cunhado por Myers (1977).

A partir de meados da década de 80 e início da década de 90, o conceito de irreversibilidade combinado com a incerteza começa a ser introduzido aos modelos de expansão de capacidade com os trabalhos de McDonald e Siegel (1985), McDonald e Siegel (1986), Pindyck (1988), Dixit (1989), Pindyck (1991) e Dixit (1991).

McDonald e Siegel (1986) e Pindyck (1988) estão entre os primeiros estudos a utilizar o arcabouço conceitual do método dos *ativos contingentes* (“contingent claims”)<sup>1</sup> para determinar o valor da opção de postergar um investimento irreversível em face da incerteza. McDonald e Siegel (1986) mostraram que mesmo com níveis moderados de incerteza, o custo de oportunidade de investir, ou seja, o valor da opção de esperar pode ser alto e regras de investimento que ignoram tal valor podem conduzir a decisões grosseiramente erradas. Pindyck (1988) estende o modelo de McDonald e Siegel analisando a opção de investir em capacidade irreversível, assumindo que é endógena ao modelo, diante de uma incerteza no preço do produto. O autor mostra que embora a margem esperada do capital cresça com a incerteza, o aumento da incerteza faz crescer o valor da opção de esperar em uma proporção ainda maior, de modo que o efeito líquido resultante é um nível de

---

<sup>1</sup> *Método dos Ativos Contingentes* é um método para avaliação de opções reais que se baseia na construção de uma carteira de ativos financeiros, neutra ao risco, que replica o valor do ativo real. Ver Dixit e Pindyck (1994) para um maior detalhamento do método.

capacidade ótimo mais baixo quando comparado a um modelo sem o componente da incerteza.

O arcabouço teórico de opções reais recebeu contribuições de diversos autores, entre eles Trigeorgis e Mason (1987), Dixit (1989), Dixit e Pindyck (1994), Bar-Ilan e Strange (1996), Trigeorgis (1996), Dangl (1999), Novaes e Souza (2005) e Huang (2009). Dixit (1989) considerou decisões relacionadas ao momento de entrada e saída de uma empresa do mercado.

Os livros de Dixit e Pindyck (1994) e Trigeorgis (1996) são importantes referências da literatura de opções reais, assim como, o livro de Hull (2006), que foca na análise de derivativos financeiros, tais como, ações e opções, mas não trata de ativos reais. O livro de Copeland e Antikarov (2001) trata especificamente de problemas de opções reais usando árvores de decisão.

Modelos de expansão de capacidade combinados com a teoria de opções reais se proliferaram a partir de então e seus benefícios tem sido reconhecidos por pesquisadores não só do ramo financeiro, mas também têm feito muitos adeptos nas áreas de pesquisa operacional e engenharia econômica. Segundo Wu et al. (2005) a teoria de opções reais é particularmente relevante para o planejamento da capacidade porque combina incerteza com decisões gerenciais e oferece uma visão dinâmica das decisões de operação e de investimento da empresa.

São encontradas na literatura várias aplicações em indústrias de capital intensivo, tais como no setor de geração e distribuição de energia, entre os quais destacam-se, Gardner e Rogers (1999), Oren (2001), Grenadier (2002), Murto e Keppo (2002), Aguerrevere (2003), Keppo e Lu (2003), Muroaka e Oyama (2004), Madlener et al. (2005), Hlouskova et al. (2005), Greening et al. (2007), Yang et al. (2008) e Siddiqui e Maribu (2009), e na área de infraestrutura Garvin (2005).

Em um estudo detalhado sobre regulamentação de segmentos de infraestrutura, Guthrie (2006) destaca a relevância da teoria moderna de investimentos, colocando a irreversibilidade do investimento no centro de sua análise, que inclui também outras características do comportamento de uma empresa monopolista em um ambiente regulamentado.

Birge (2000) afirma que na medida em que decisões operacionais tenham um objetivo de maximização (ou minimização), a teoria de opções reais pode ser utilizada para avaliar as decisões de risco. Fazendo a conexão entre o efeito da expansão de capacidade em uma empresa e o preço de uma opção de compra, o autor mostra que riscos podem ser incorporados em modelos de planejamentos através de ajustes de

capacidade. No estudo, é apresentado um modelo que integra formas de riscos financeiros em um problema de investimento em capacidade linear.

Em geral, a teoria de opções reais pode ser utilizada em uma grande variedade de aplicações que envolvem decisões operacionais.

A opção real pode ser de expandir capacidade, postergar capacidade (Pindyck, 1988), abandonar um projeto (Myers e Majd, 1990), parar temporariamente a produção (McDonald e Siegel, 1985), ou transferir à produção em uma cadeia de suprimentos diante de riscos inerentes a dinâmica do mercado internacional, ou seja, taxa de câmbio, custos locais de produção, preços e demanda local, etc., tal como apresentados em Kogut e Kulatilaka (1994) e Cohen e Huchzermeier (1998).

Dangl (1999) estende a teoria de opções reais apresentada em Dixit e Pindyck (1994) desenvolvendo um modelo que determina simultaneamente o tempo ótimo de investimento e o nível ótimo de capacidade. No referido modelo, o projeto de expansão uma vez instalado não se permite expansões. Resultados numéricos do estudo indicam, ao contrário de resultados de modelos com investimentos incrementais (Pindyck, 1998), que a capacidade ótima instalada aumenta significativamente com a incerteza e isto traz como consequência a postergação de investimentos até níveis mais altos da demanda. Nos modelos com investimentos incrementais (Pindyck, 1988), por outro lado, a estratégia de investimento é contrária. Nestes modelos, a incerteza reduz a quantidade ótima de capacidade instalada. A tendência de super dimensionar um projeto considerado no modelo de Dangl (1999) pode ser interpretada como um efeito de decisões do tipo “uma vez e para sempre”.

Segundo Wu et al. (2005), existe uma crescente integração entre a teoria de opções reais e a literatura de gestão da operação, especialmente na indústria de alta tecnologia. Nos últimos anos empresas de alta tecnologia estão aplicando a teoria de opções reais para definir suas estratégias de investimentos e operações, ou seja, para determinar o momento e o porte dos ajustes de capacidade.

### **2.1.6. Teoria dos jogos**

O principal inconveniente da maioria dos trabalhos existentes na literatura de opções reais e outras correntes que tratam o problema de expansão de capacidade é que os efeitos das ações dos competidores nestes trabalhos são, em geral, ignorados. Se empresas receiam perder

participação de mercado por competidores ou entrantes, a opção por esperar perde valor. Para melhor entender e analisar investimentos da indústria sob pressão competitiva é essencial a perspectiva da teoria dos jogos sobre o exercício de estratégias em equilíbrio. A Teoria dos Jogos é explorada em maiores detalhes no capítulo 3 deste trabalho. Um trabalho pioneiro nesta área é o de Lucas e Prescott (1971) que analisam o comportamento de investimentos de uma empresa com a demanda seguindo um processo de Markov de tempo discreto. Os autores mostram que o equilíbrio de estratégias de investimentos em competição perfeita pode ser determinado maximizando o excedente da sociedade, reduzindo o modelo a um simples problema de otimização e utilizando a programação dinâmica para obter os resultados. Empresas que ignoram a competitividade no exercício de suas estratégias são chamadas na literatura de empresas “míopes”.

Leahy (1993) considerou três tipos de estratégias de investimentos: as políticas de uma empresa competitiva; as políticas governamentais; e a as políticas de uma empresa míope, ou seja, que ignora a influência de outros competidores na evolução dos preços. O estudo demonstrou que o tempo ótimo de investimento não depende do processo endógeno do preço em um ambiente competitivo e que os momentos de investimentos de uma empresa míope e de uma empresa agindo estrategicamente em um ambiente de competição perfeita são idênticos. Baldursson e Karatzas (1997) estabelecem uma conexão entre o ótimo da sociedade, o ótimo de uma empresa míope e o equilíbrio em um modelo com demanda estocástica. Segundo Murto et al. (2004), algumas premissas assumidas em tais modelos restringem suas aplicações. Um exemplo é a premissa de competição perfeita, que em geral não é realista. Grenadier (1999) incorpora o tempo de construção do aumento de capacidade ao modelo de Baldursson e Karatzas (1997).

Estudo sobre competição entre empresas em oligopólio, com modelos dinâmicos de investimentos, de tempo contínuo, foram apresentados em Gilbert e Harris (1984) e Mills (1990). Gilbert e Harris (1984) estabeleceram algumas das propriedades de equilíbrio de jogos com ciclo fechado<sup>2</sup> entre empresas que competem pelo momento de investimento. Cada empresa tem um tempo de reação diferente, a partir

---

<sup>2</sup> Estratégias de ciclo fechado ocorrem quando os jogadores podem revisar suas decisões no desenrolar do jogo. Distinguem-se de estratégias de ciclo aberto, onde decisões são tomadas antecipadamente e não podem ser revisadas ao longo do jogo.

do momento em que observa o mercado, para investir em sua capacidade.

Mills (1990) estendeu o trabalho de Gilbert e Harris (1984) e mostra que devido à economia de escala, a indústria não tende a manter apenas grandes instalações ou apenas pequenas instalações no equilíbrio ao longo do tempo. Ao contrário, pequenas e grandes instalações se intercalam ao longo do tempo, devido ao confronto entre custo versus capacidade.

Ghemawat e Nalebuff (1985) estudaram um modelo de oligopólio onde as empresas têm que decidir o momento de sair do mercado em tempos de declínio de demanda. Concluíram que existe um único equilíbrio perfeito para empresas com diferentes participações de mercado, porém com custos idênticos, em que as chances de sobrevivência das empresas são inversamente proporcionais aos seus tamanhos, ou seja, a empresa maior é a primeira a sair do mercado e a menor a última. Tais modelos assumem previsões perfeitas, portanto, com uma abordagem determinística. Foi na década de 90 e início dos anos 2000, entretanto, que modelos de investimentos considerando a reação do competidor se proliferaram.

Em setores de infraestrutura, por exemplo, poucas empresas têm capacidade de realizar investimentos em expansão de capacidade. A indústria de telecomunicação é um exemplo de setor em que o preço é endógeno às decisões de investimento. Em geral, em uma dada região geográfica existem poucas empresas capazes de investir em larga escala. Uma expansão de rede geralmente aumenta de forma significativa a oferta do mercado, o que significa que o efeito de novos investimentos sobre o preço do produto deve ser sempre levado em consideração. Murto et al. (2004) é um dos exemplos de modelos neste segmento que levam em consideração o efeito de investimentos dos concorrentes para se definir a estratégia de uma empresa. Outros mercados, como o de energia, por exemplo, a decisão de investimentos de uma empresa pode também impactar significativamente os preços futuros, conforme apresentado em Bushnell e Ishii, 2007. Este impacto é ainda amplificado pelas características que fazem do setor elétrico um mercado altamente volátil: impossibilidade de manter estoques e uma demanda altamente inelástica. Portanto, sob o ponto de vista de modelagem, pode ser desastroso, conforme afirma Bushnell e Ishii (2007), basear decisões de investimentos analisando séries estatísticas de preços, como se tais preços viessem da natureza e não fossem afetados pelas próprias decisões das empresas. Outro argumento utilizado por Murto et al. (2004) são que os modelos em geral assumem investimentos

incrementais, o que significa que as expansões podem ser realizadas em unidades infinitesimais, quando na realidade, em geral, as empresas investem em expansões discretas, por projetos, para obter vantagens de economias de escala.

Cachon e Lariviere (1999) apresentam um modelo de escolha de capacidade e alocação envolvendo uma cadeia de suprimentos com um único fornecedor e vários varejistas. Os varejistas têm o monopólio em seus mercados locais, mas competem entre si para o atendimento de suas necessidades de compra por parte de um único fornecedor central com capacidade limitada. As necessidades dos varejistas não são compartilhadas entre os competidores.

Mieghem e Dada (1999) estudam a interdependência das decisões sobre a capacidade, o estoque e o preço. Os autores estudam o impacto do momento de tomada destas decisões na lucratividade da empresa, examinando três diferentes estruturas de mercado, ou seja, o monopólio, o oligopólio e a competição perfeita. Ao contrário do resultado obtido com a postergação da produção, a postergação de preço torna as decisões de investimento e de produção relativamente insensíveis à incerteza. De acordo com estes resultados, portanto, as empresas podem tomar decisões sob condições determinísticas caso tenham alguma flexibilidade em preço. O valor relativo da postergação, segundo o estudo, tende a crescer na medida em que a indústria torna-se mais competitiva.

No contexto da indústria de geração de energia após desregulamentação do setor, Murphy e Smeers (1999) apresentam um estudo de expansão de capacidade que considera três diferentes estruturas de mercado: competição perfeita, modelo de Cournot de ciclo aberto, em que investimentos e contratos de vendas são realizados simultaneamente, e modelo de Cournot de ciclo fechado, em que investimentos são realizados em um estágio e as vendas em outro estágio, ou seja, em um mercado spot. Um dos principais resultados obtidos no estudo é que os preços e quantidades encontrados no jogo de ciclo fechado, quando a solução existe, se posicionam entre os valores obtidos no jogo de ciclo aberto e na competição perfeita.

A combinação das literaturas de opções reais e de teoria dos jogos resultou em uma corrente recente da literatura que passou a ser muito difundida a partir do início deste século.

Os jogos resultantes da junção destas duas teorias são chamados de investimentos estratégicos sob incerteza ou de jogos de opção (Dixit e Pindyck, 1994; Dias, 2005). Nestes jogos as empresas investem, não só por necessidade real, mas também por se sentirem ameaçadas por

seus concorrentes. Estes jogos são chamados na literatura de jogos de “preempção”<sup>3</sup> (Dias, 2005). O comportamento de preempção ocorre em casos de: (i) medo de perder a liderança tecnológica; (ii) ocupação de mercados antes da concorrência; e (iii) medo de ser preterido pelo comprador que busca o menor preço.

Um exemplo do caso (ii) ocorreu com a cadeia de varejos americana Wall Mart. No início de seu crescimento, entre 1960 e 1970, a estratégia da cadeia era estabelecer lojas de descontos em várias cidades do sudoeste americano. As cidades eram pequenas o suficiente que não comportavam mais de uma loja daquele gênero em sua região. Nos anos 80, o Wall Mart estabeleceu um novo conceito conhecido como “warehouse clubs” em áreas com maior densidade populacional, o que lhe proveu uma nova vantagem significativa sobre a concorrência (Lambrecht e Perraudin, 2003). O comportamento do Wall Mart é um exemplo típico da combinação de decisões reais com decisões estratégicas de investimentos, este último chamado de investimento de preempção.

De acordo com Smit e Trigeorgis (2004), em um mercado global de incerteza crescente e grande dinamismo, a adaptabilidade estratégica torna-se essencial para empresas que desejam tomar vantagem de boas oportunidades de investimentos, responder adequadamente às ameaças de ações dos competidores e mitigar potenciais perdas com o desenvolvimento de mercados não rentáveis. Pensando em termos de teoria dos jogos, opções reais e flexibilidade, os gerentes podem elaborar as seguintes questões estratégicas: qual é o valor das oportunidades de crescimento da empresa? Quando é apropriado acelerar o investimento de forma a aumentar a participação de mercado e se posicionar competitivamente? Quando é mais adequado esperar pela informação para reduzir as incertezas? Entre outras questões. Em outras palavras, estes estudos analisam o efeito do comportamento competitivo das empresas sobre as decisões de investimentos, na perspectiva da teoria de opções reais cujo modelo ainda pode considerar características específicas de projetos de investimentos, tais como, tempo de construção, flexibilidade operacional e escolha da capacidade inicial de instalação.

Exemplos de trabalhos que combinam opções reais e equilíbrio são apresentados em Williams (1993), Smit e Ankum (1993), Grenadier

---

<sup>3</sup> Preempção no contexto deste trabalho refere-se ao uso de estratégias de antecipação de investimentos para ocupar mercado antes do competidor, tal como em Gilbert e Harris (1984).

(1996), Kulatilaka e Perotti (1998), Baldursson (1998), Grenadier (2002), Lambrecht e Perraudin (2003) e Aguerrevere (2003).

Segundo Grenadier (2002), existem relativamente poucos estudos envolvendo opções reais e equilíbrio, primeiramente pelo fato de que o equilíbrio é ignorado na literatura de opções financeiras já que tais opções são consideradas ativos de risco que, em geral, pertencem a agentes externos à empresa. Em segundo lugar, a aplicação de teoria dos jogos a modelos de tempo contínuo não é bem desenvolvida e um tanto quanto complexa. Estes modelos em geral são estáticos, ou seja, de um único projeto (Grenadier, 1996; Kulatilaka e Perotti, 1998; Lambrecht e Perraudin, 2003) ou dinâmicos, porém, assumindo que investimentos são incrementais (Baldursson, 1998; Grenadier, 2002; Aguerrevere, 2003). Kulatilaka e Perotti (1998) mostraram que quanto maior a incerteza, maior também é a motivação das empresas em investir quando estas operam sob um ambiente de competição imperfeita.

Entre os modelos de opções reais que incorporam endogenamente a competição entre empresas cita-se ainda os trabalhos pioneiros de Dixit (1991) e Williams (1993), assim como os trabalhos posteriores de Grenadier (1995) e Fries et al. (1997). Nesta linha de pesquisa, Kogut e Kulatilaka (1994) apresentam um modelo aplicado ao investimento direto estrangeiro, Grenadier (1996) à incorporação imobiliária e Weeds (2002) às competições de pesquisa e desenvolvimento. Os três últimos modelos supracitados utilizam modelos de tempo contínuo, jogos de líder-seguidor nos quais empresas determinam o gatilho que definirá o momento de seus investimentos.

Baldursson (1998) estuda o processo de evolução de preços de um produto perecível em uma indústria oligopolizada, podendo ser de energia elétrica, onde os competidores usam a capacidade de produção como variável estratégica sob uma curva de demanda linear estocástica. A principal contribuição de Baldursson (1998) é mostrar que, quando os investimentos são incrementais, o comportamento do preço será qualitativamente o mesmo no ambiente de oligopólio e na competição perfeita, ou seja, o preço flutuará com a variação da demanda sem, porém, ser afetado por mudanças na oferta, até determinados limites de alterações na capacidade da indústria.

Grenadier (2002) desenvolve uma abordagem que estabelece uma estratégia de investimentos de empresas sob um equilíbrio de Cournot-Nash. Cada empresa se põe diante de uma sequência de oportunidades de investimentos e o modelo deve determinar uma estratégia para o seu caminho de investimento, considerando o tempo de construção.



Aguerrevere (2003) estende os trabalhos de Grenadier (2002) e Baldursson (1998) introduzindo a flexibilidade operacional no modelo de escolha de capacidade. Os resultados indicam que quanto maior a incerteza maior é o incentivo das empresas em manter uma maior capacidade. Outro resultado encontrado por Aguerrevere (2003) é que empresas podem identificar o momento ótimo para investir mesmo quando a sua capacidade não está sendo totalmente utilizada.

Lambrecht e Perraudin (2003) examinam o impacto do comportamento estratégico de ocupação de mercado e a informação incompleta a cerca dos competidores na valoração do investimento e na determinação do momento ótimo de investir.

Pesquisas voltadas para a intersecção entre a teoria de investimentos sob incerteza e teoria dos jogos têm sido numerosas nos últimos anos. Uma pesquisa recente com o objetivo de revisar a literatura de jogos de opção é apresentada em Chevalier-Roignant et al. (2011). Os autores apresentam uma visão geral de estudos com esta abordagem de forma a categorizar as pesquisas nesta área da literatura.

### **2.1.7. Processos de decisão Markovianos**

Os modelos dinâmicos de expansão de capacidade requerem uma formulação que incorpore intrinsecamente a intertemporalidade do processo decisório. Se o estado que descreve o sistema evolui de forma estocástica, muitos pesquisadores têm se utilizado de uma classe de sistema cujas estratégias são chamadas Markovianas, de forma a reduzir o problema da multiplicidade de equilíbrios. Este tipo de equilíbrio é função apenas do estado corrente, o qual segue um processo de Markov (Dias, 2005) e não da história, ou seja, de todos os estados que foram atingidos pelo processo até o presente momento. Este tipo de estado incorpora o efeito direto do passado no jogo corrente (Fudenberg e Tirole, 1991, capítulo 13; Maskin e Tirole, 2001).

Modelos baseados em processos Markovianos são apresentados em Zhang et al. (2004), Murto (2004), Murto et al. (2004), Bushnell e Ishii (2007), Bhatnagar et al. (1999), Garcia e Shen (2010). Segundo Zhang et al. (2003), os modelos Markovianos são uma ferramenta de propósito mais generalista, podendo prover grande flexibilidade na modelagem, mas por outro lado tornando a solução computacionalmente complexa quando se trata de problemas reais. Em tais modelos assume-se que as empresas agem de forma não cooperativa entre si. Suas decisões de investimentos dependem do estado atual do mercado, descrito normalmente pela demanda, em geral, uma variável estocástica,

e pela capacidade total do mercado. O equilíbrio resultante deste processo é conhecido como Equilíbrio Perfeito de Markov (EPM)<sup>4</sup>.

Os modelos de Murto et al. (2004) e de Bushnell e Ishii (2007) abordam problemas de análise de investimentos em um mercado oligopolizado para um produto homogêneo. Tais modelos utilizam o conceito de Equilíbrio (de Nash) Perfeito de Markov e consideram que as decisões de investimentos no longo prazo são dependentes de lucros obtidos no curto prazo. O modelo de Murto et al. (2004) será detalhado na seção 2.2.3.

Bhatnagar et al. (1999), apresenta um modelo para um Processo de Decisão Markoviano de horizonte finito aplicado à indústria de semicondutores. O objetivo do modelo é determinar uma política ótima de ações que incluem compra e descarte de equipamentos, atualizações tecnológicas de equipamentos/processos e alocação de equipamentos à linha de produção.

Garcia e Shen (2010) desenvolveram um estudo que igualmente destaca a dinâmica entre os incentivos de curto e médio prazo que empresas do setor energético enfrentam para expandir suas capacidades em um ambiente de oligopólio. Utilizando o arcabouço conceitual do Equilíbrio Perfeito de Markov, os autores apresentam um modelo dinâmico com uma demanda crescendo de forma estocástica no tempo. O objetivo é avaliar os reais incentivos que empresas do setor energético têm para investir em níveis seguros de capacidade e, portanto, minimizando riscos de uma interrupção de fornecimento provocados por demandas inesperadamente altas. O principal resultado apresentado é que o mercado em si não é suficiente para induzir um nível social ótimo de capacidade. Em geral, segundo resultados do estudo, as chances de problemas de falta de capacidade no equilíbrio aumentam quando se reduz a probabilidade de crescimento da demanda, aumentam-se as taxas de desconto e de depreciação e/ou aumentam-se os custos de produção e/ou de investimentos. Os resultados do estudo ainda indicam que níveis ótimos de investimentos não serão induzidos apenas com o aumento dos preços máximos de regulação de mercado. A utilização de um seguro contra um eventual não crescimento da demanda é considerada, segundo os autores, uma política de intervenção mais efetiva.

---

<sup>4</sup> A definição de Equilíbrio Perfeito de Markov é formalizada na seção 3.4 deste trabalho. Para um detalhamento maior ver livro *Teoria dos Jogos*, de Fudenberg e Tirole (1991, capítulo 13).

### 2.1.8. Outras formulações

Motivado por aplicações na indústria de semicondutores, uma corrente da literatura tem se dedicado nos últimos anos ao desenvolvimento de modelos de planejamento de capacidade para este importante setor da economia atual. Pelo menos três fatores fazem com que este problema seja crucial para a referida indústria. Primeiro o alto custo e o longo tempo necessário para aquisição de equipamentos e construção de salas limpas<sup>5</sup>, os quais custam na ordem de milhões de dólares e levam em média 12 meses para serem construídas. O segundo fator, aspecto óbvio neste segmento, é a alta taxa de obsolescência. Na medida em que a tecnologia de fotolitografia avança, novos e mais caros equipamentos tem que ser adquiridos para garantir eficiência e produtividade. Um terceiro fator é a que a capacidade de produção neste setor é altamente variável com o nível da mão de obra local, configuração da capacidade, tamanho das unidades fabris (chamadas de *wafers*), restrições impostas por clientes contrárias aos interesses dos fabricantes, etc. (Karabuk e Wu, 2003). Tal perfil de indústria e do estado atual da economia, induziram autores a incorporarem outras variáveis em modelos de expansão de capacidade, tais como, portfólio de capacidade (Eberly e Mieghem (1997), obsolescência (Pangburn e Sundaresan, 2009 e Kouvelis e Gutierrez, 1997), *hedging* operacional<sup>6</sup>(Huchzermeier e Cohen, 1996) e aversão a risco (Mieghem, 2003).

Em Çakanyildirim e Roundy (2002a) é apresentado um modelo de programação linear que minimiza os custos de venda perdida e de capacidade de produção de um único produto, tratando o tempo de aquisição de equipamentos como uma variável contínua de decisão. A análise é simplificada depois de observar que a sequência ótima da expansão é independente da demanda.

Em Çakanyildirim e Roundy (2002b) é apresentado um algoritmo de tempo polinomial para determinar um plano de expansão e retração de capacidade nesta indústria. Assume-se no modelo uma só família de produto com uma demanda estocástica que primeiramente cresce e depois decresce ao longo do tempo.

---

<sup>5</sup> Sala limpa é um ambiente controlado, utilizado para manufatura de produtos onde a contaminação por partículas presentes no ar interfere no resultado.

<sup>6</sup> Huchzermeier e Cohen (1996) já tinham cunhado o termo de *hedging* operacional para diferenciar do conceito de *hedging* financeiro, que se utiliza de instrumentos financeiros e mercados de capital para mitigar a exposição da empresa aos riscos.

Zhang et al. (2004) estende o modelo de Çakanyildirim e Roundy (2002b) para um modelo de múltiplos produtos com tempo discreto, capturando a incerteza da demanda representada por uma coleção de raios emanando de um ponto e contidos em um espaço multidimensional. O modelo permite obtenção de solução para problemas de escala real.

Huh et al. (2006) apresentam um modelo de planejamento de capacidade de tempo contínuo com múltiplos produtos. Cada produto requer uma operação específica que pode ser realizada por um ou mais grupos de equipamentos para semicondutores. Como a demanda estocástica de cada produto pode ser decrescente, é permitido a retirada ou compra de equipamentos. Para a solução é apresentado um algoritmo heurístico baseado em cluster que incorpora técnicas de redução de variância da literatura de simulação e princípios de um algoritmo genérico de fluxo máximo da literatura de otimização de redes.

Um formulação muito utilizada em problemas de expansão de capacidade na indústria de semicondutores é a programação estocástica, tal como apresentado em Ahmed et al. (2002), Barahona et al. (2005), Geng et al. (2009) e Huang e Ahmed (2009). Em problemas de expansão de capacidade sob incerteza com tempos discretos, o modelo de programação estocástica utiliza uma abordagem de dois estágios. No primeiro estágio, antes da demanda total ser conhecida, o produtor realiza pedidos de compra de componentes para os seus fornecedores a um determinado custo por unidade. Podem existir tipos de produtos diferentes, cada qual com sua demanda específica. No segundo estágio, após a demanda total ser observada, o produtor decide que tipo de demanda será satisfeita de forma a minimizar o número de componentes em excesso. Geralmente a incerteza da demanda é representada em termos de cenários.

Eppen et al. (1989), Escudero et al. (1993) e Geng et al. (2009) utilizam cenários para planejamento de capacidade em indústrias de manufatura. Entretanto, para que o modelo seja computacionalmente viável, um número limitado de cenários deve ser empregado. Muitas vezes, portanto, torna-se impossível resolver modelos que consideram vários tipos de demanda. Karabuk e Wu (2003) e Ahmed et al. (2002) elaboraram modelos utilizando a programação estocástica em múltiplos estágios. A programação estocástica em múltiplos estágios é uma extensão do modelo de dois estágios de forma a permitir a revisão das decisões tomadas em cada estágio diante da incerteza revelada até então (Ahmed et al., 2002).

Muitos dos modelos de expansão de capacidade apresentados nesta revisão bibliográfica se baseiam em problemas envolvendo apenas um recurso de capacidade (Manne, 1961, Luss, 1982; Davis et al., 1987; Bean et al., 1992). Modelos envolvendo múltiplos recursos de capacidade tinham tido pouca atenção pela literatura até então. Estes modelos são conhecidos na literatura da Pesquisa Operacional como programação estocástica com recurso (Mieghem, 2003). As soluções tradicionais para este problema utilizam programação matemática estocástica discreta cuja estrutura permite modelar vários aspectos práticos, porém, muitas vezes, às custas de um aumento na dificuldade computacional, fazendo com que se recorra a métodos numéricos para solução.

Eberly e Mieghem (1997) apresentam um modelo mais genérico para estudar o investimento de múltiplos recursos sob incerteza em um ambiente dinâmico e não estacionário com custos reversíveis. Os autores definem pioneiramente os chamados modelos de portfólio de capacidade e mostram que o modelo com horizonte infinito, com uma estrutura particular, se reduz a um problema de um único investimento inicial, transformando efetivamente o problema de capacidade dinâmico para um problema de um único período. Quando a função de valor a otimizar é côncava, os autores mostram que a estratégia ótima segue uma política de controle-limite chamada de IMD (Investir, Manter ou Desinvestir) e provêem uma solução analítica fechada para um modelo de investimento onde a incerteza da demanda é representada por um processo geométrico Browniano de tempo contínuo. Os autores introduzem também o conceito de ordens de expansão para diferentes recursos de capacidade, o que iria inspirar mais tarde a política de gargalo ou “bottleneck policy” de Çakanyildirim e Roundy (2002b).

Em uma extensão do modelo de Eberly e Mieghem (1997), Harrison e Mieghem (1999) apresentam um modelo para determinar a estratégia de investimento ótimo de uma empresa que emprega múltiplos recursos para produzir diversos tipos de produtos em um ambiente de incerteza da demanda. Os autores adaptam o conhecido modelo do jornaleiro<sup>7</sup> para uma versão multidimensional e concluem que a posição ótima de investimento pode ser interpretada como uma

---

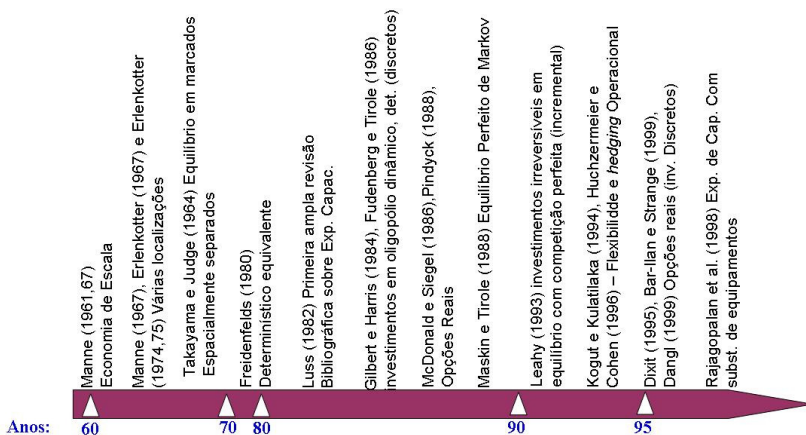
<sup>7</sup> Um vendedor de jornal tem o dilema diário de determinar a quantidade ótima de jornais de forma a minimizar a sobra ou a falta de jornal no final do dia. Varias empresas se deparam com o mesmo problema em seu dia a dia. O modelo de determinação da quantidade ótima é conhecido na literatura como modelo do jornaleiro (Slack et al., 2002).

proteção (hedge) contra a incerteza da demanda. A multidimensionalidade introduzida no modelo do jornaleiro por Harrison e Miegheem (1999) permite incorporar variáveis de produção, demanda e recursos (capacidade) ao modelo através de uma estrutura matricial especial, que inclui vetores de custo, preço, matrizes de restrições de capacidade e de demanda e uma distribuição de demanda multivariada.

Exemplos de outros trabalhos envolvendo modelos com múltiplos recursos utilizando a formulação do modelo do jornaleiro na versão multidimensional foram abordados em Miegheem e Rudi (2002) e Miegheem (2003).

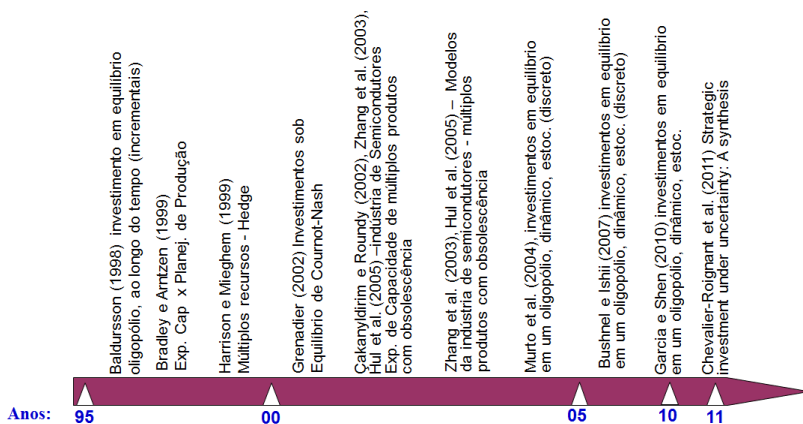
As figuras 2.3a e 2.3b, apresentam um resumo da evolução bibliográfica de modelos de expansão de capacidade apresentado neste capítulo, como forma de destacar o que se considera como os principais trabalhos pesquisados.

**Figura 2.3a** – Evolução bibliográfica 1960-1995 – principais trabalhos.



Fonte: elaborado pelo autor.

**Figura 2.3b** – Evolução bibliográfica 1995-2012 – principais trabalhos.



Fonte: elaborado pelo autor.

Para fins didáticos, a seção seguinte apresentará os principais métodos de solução e abordagens conceituais identificados no levantamento bibliográfico, posicionando o modelo proposto nesta pesquisa entre estes.

## 2.2. LITERATURA FOCO DESTA PESQUISA

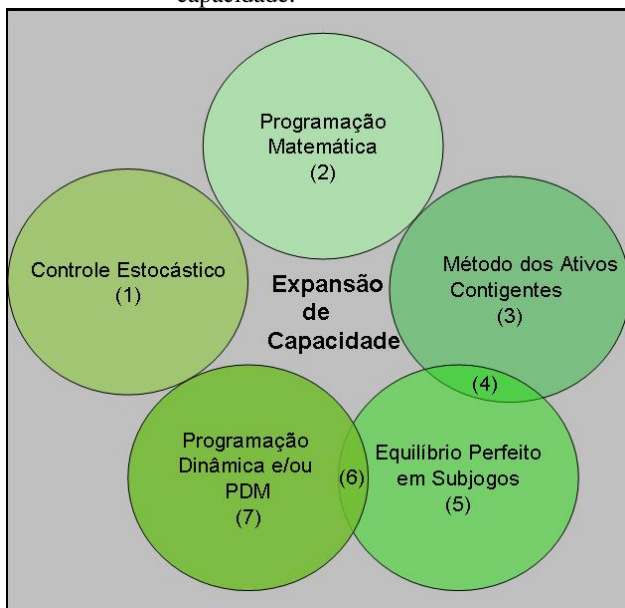
### 2.2.1. Métodos de solução

Na seção anterior foram apresentados diversos trabalhos de expansão de capacidade. Tais estudos foram organizados cronologicamente nas diversas correntes literárias, para as quais foram identificados diferentes métodos de solução, cada qual apropriado para as condições assumidas na modelagem do problema, tais como, tempos discretos ou contínuos, horizontes de planejamento finito ou infinito, evolução do estado do sistema seguindo um processo determinístico ou estocástico, instalações únicas ou múltiplas, mercado único e local ou vários mercados e distribuídos espacialmente.

Os principais métodos de solução encontrados foram: controle estocástico, programação matemática, método dos ativos contingentes da teoria de opções reais, equilíbrio perfeito em subjugos, programação dinâmica, processos de decisão Markovianos e, em alguns casos, uma combinação de um ou mais destes métodos. A figura 2.4 ilustra os

principais métodos de solução identificados nesta pesquisa e associa os principais trabalhos a cada uma destas abordagens.

**Figura 2.4** – Métodos de solução do problema de expansão de capacidade.



Fonte: elaborado pelo autor.

- (1) Controle estocástico: Manne (1961), Giglio (1970), Freidenfelds (1980), Davis et al. (1987), Bean et al. (1992).
- (2) Programação matemática: Rao e Rutenberg (1977), Eppen et al. (1989), Escudero et al. (1993), Li e Tirupati (1994), Karabuk e Wu (1999), Ahmed et al. (2002), Zhang et al. (2003), Geng et al. (2009).
- (3) Métodos dos ativos contingentes (opções reais): McDonald e Siegel (1986), Pindyck (1988), Bar-Ilan e Strange (1999), Dangl (1999) e Novaes e Souza (2005).
- (4) Opções reais e equilíbrio: Williams (1993), Grenadier (1996), Kulatilaka e Perotti (1998), Lambrecht e Perraudin (1999), Granadier (2002), Murto e Keppo (2002), Aguerrevere (2003).
- (5) Equilíbrio perfeito em subjogos: Lucas e Prescott (1971), Leahy (1993), Baldursson e Karatzas (1997).



- (6) Equilíbrio perfeito e programação dinâmica: Maskin e Tirole (1988), Murto et al. (2004), Bushnell e Ishii (2007), Garcia e Shen (2010).
- (7) Programação dinâmica e/ou processos de decisão Markovianos: Zangwill (1966), Erlenkotter (1975), Freidenfelds (1981), Luss (1982), Dixit e Pindyck (1994) e Dangl (1999).

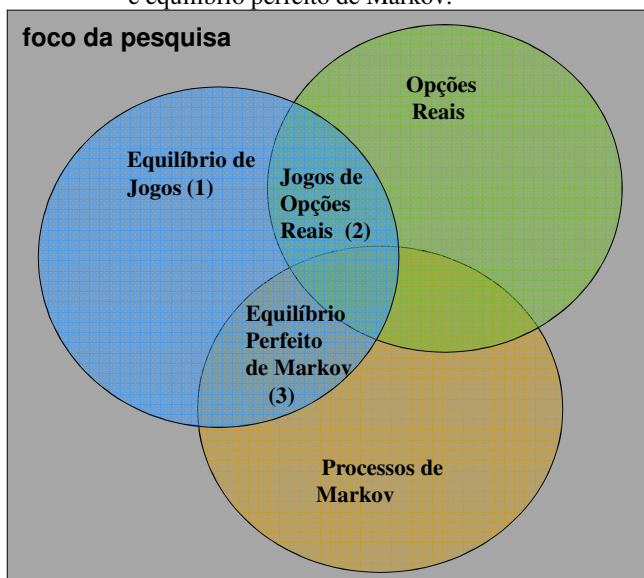
O método de solução adotado para o modelo de expansão de capacidade proposto nesta tese é mais próximo aos trabalhos identificados nas categorias (5), (6) e (7) indicadas na figura 2.4, e mais especificamente aos trabalhos posicionados na categoria (6), ou seja, os estudos que utilizam em sua formulação os conceitos de equilíbrio perfeito em subjogos e a programação dinâmica. Entretanto, outras ferramentas serão utilizadas ao se introduzir características específicas no modelo proposto, conforme será visto nos capítulos seguintes.

### **2.2.2. Abordagens conceituais**

O arcabouço teórico em que se baseia esta tese é principalmente formado pelos conceitos de teoria de investimentos sob incerteza (opções reais), teoria dos jogos (equilíbrio) e processos de Markov. Como mencionado anteriormente, estes estudos fazem parte de uma corrente relativamente recente da literatura, chamados de jogos de opção, conforme mencionado na seção 2.1.6. O presente trabalho não aplica diretamente os jogos de opção, porém, o seu conceito está implícito no modelo proposto, como será visto no capítulo 4. A seguir, através de diagramas de Ven em sequência, destaca-se o foco da pesquisa baseado nas características comuns dos modelos citados nesta pesquisa.

Na figura 2.5 são apresentados os principais trabalhos identificados com cada uma destas correntes:

**Figura 2.5** – Modelos que tratam de equilíbrio, jogos de opção e equilíbrio perfeito de Markov.



Fonte: elaborado pelo autor.

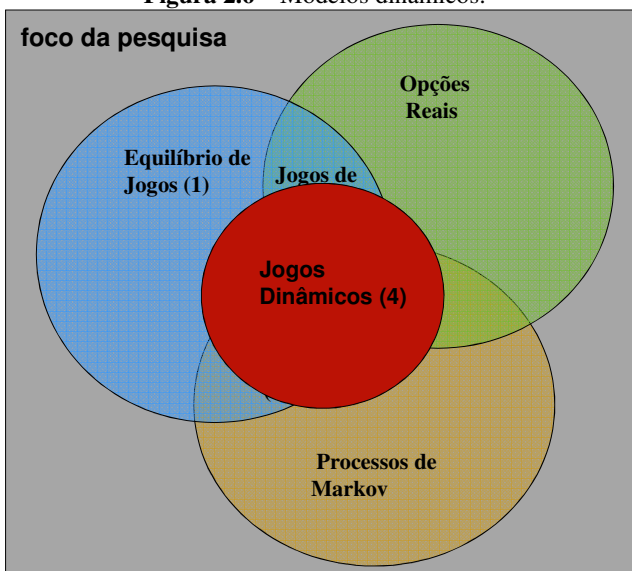
- (1) Equilíbrio de Jogos: Lucas e Prescott (1971); Gilbert e Harris (1984), Ghemawat e Nalebuff (1985), Mills (1990), Fudenberg e Tirole (1991), Leahy (1993), Baldursson e Karatzas (1997), Grenadier (1999), Cachon e Lariviere (1999), Murphy e Smeers (2005).
- (2) Jogos de opções reais: Smit e Ankum (1993), Williams (1993), Grenadier (1996), Fries et al. (1997), Kulatilaka e Peroti (1998), Baldursson (1998), Lambrecht e Perraudin (1999), Weeds (2002), Murto e Keppo (2002), Grenadier (2002), Aguerrevere (2003), Murto et al. (2004), Bushnell e Ishii (2007).
- (3) Equilíbrio perfeito de Markov: Bhatnagar et al. (1999), Zhang et al. (2003), Murto (2004), Murto et al. (2004), Dias (2005), Bushnell e Ishii (2007), Garcia e Shen (2010).

O problema de expansão de capacidade desta tese envolve decisões de ajustes de capacidade ao longo do tempo. Sendo assim, o interesse desta pesquisa diz respeito apenas a problemas dinâmicos de

expansão de capacidade. Os principais trabalhos relacionados na figura 2.5, que consideram um contexto dinâmico, estão ilustrados na figura 2.6.

Jogos dinâmicos:

**Figura 2.6 – Modelos dinâmicos.**



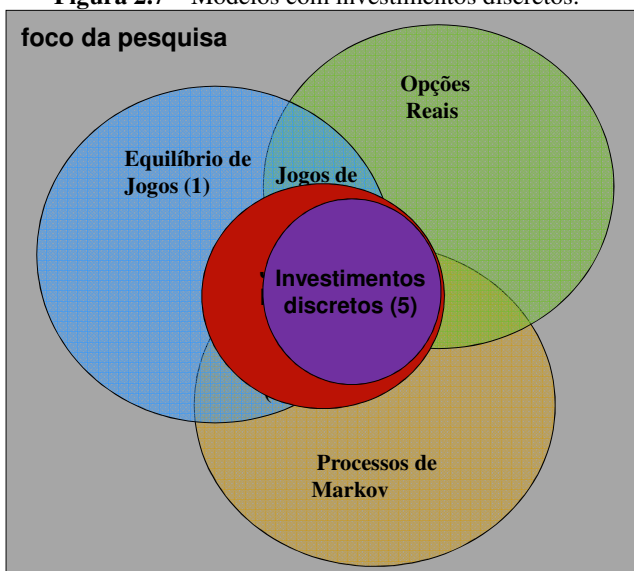
Fonte: elaborado pelo autor.

- (4) Jogos dinâmicos: Gilbert e Harris (1984), Ghemawat e Nalebuff (1985), Mills (1990), Fudenberg e Tirole (1991), Willians (1993), Baldursson (1998), Bhatnagar et al. (1999), Zhang et al. (2003), Murto (2004), Murto et al. (2004), Dias (2005), Bushnell e Ishii (2007), Garcia e Shen (2010).

O modelo apresentado nesta pesquisa considera os investimentos como sendo discretos. De fato, na maioria das situações reais, tratando-se de produção de commodities, os incrementos de capacidade são realizados em saltos a cada período de tempo. Assim sendo, dos trabalhos apresentados na figura 2.6, destacam-se aqueles em que as expansões são discretas no tempo, conforme figura 2.7.

Investimentos discretos:

**Figura 2.7** – Modelos com investimentos discretos.



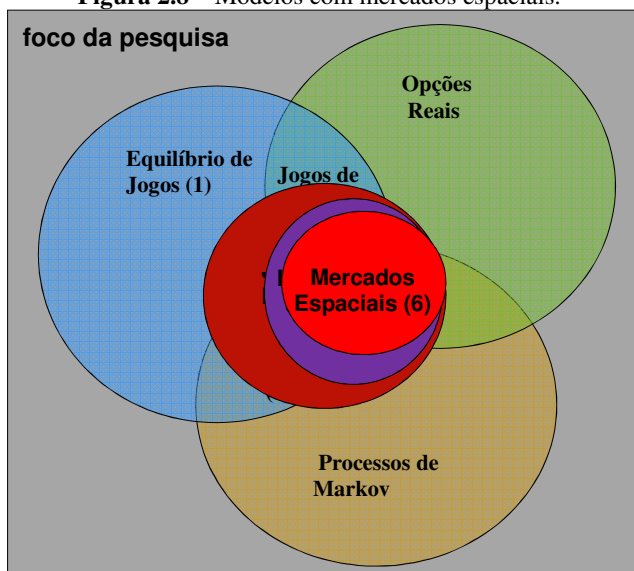
Fonte: elaborado pelo autor.

- (5) Investimentos discretos: Mills (1990), Bhatnagar et al. (1999), Zhang et al. (2003), Murto (2004), Murto et al. (2004), Dias (2005), Bushnell e Ishii (2007), Garcia e Shen (2010).

Os estudos apresentados na figura 2.7, entretanto, dizem respeito a mercados locais. O presente estudo apresenta um modelo de expansão de capacidade com empresas atuando em um mercado espacial, conforme sugerido na figura 2.8.

Mercados espaciais:

**Figura 2.8** – Modelos com mercados espaciais.



Fonte: elaborado pelo autor.

(6) Mercados espaciais: o modelo proposto nesta pesquisa.

Diante do exposto, conclui-se que os estudos que mais se aproximam ao modelo proposto nesta tese são, dentre aqueles mencionados nesta seção, justamente os que adotam o conceito de equilíbrio perfeito de Markov, dinâmicos e com investimentos discretos (não incrementais) e, por último, que consideram implícita ou explicitamente o conceito de jogos de opção. Tais estudos são identificados como sendo, em primeiro plano, o trabalho de Murto et al. (2004), assim como, em um segundo plano, os trabalhos de Bushnell e Ishii (2007), Gilbert e Harris (1984), Mills (1990), Bhatnagar et al. (2009), Garcia e Shen (2010) e Zhang et al. (2003). Sendo assim, será apresentado resumidamente a seguir o modelo de Murto et al. (2004), pois este formará a base conceitual para o modelo proposto nesta pesquisa.

### 2.2.3. O modelo de Murto et al.

O modelo de Murto et al. (2004) busca determinar o momento ótimo de implantar projetos de investimentos para aumentos discretos de capacidade de empresas em um ambiente de oligopólio diante de uma demanda que varia estocasticamente. As empresas têm um leque de projetos à sua disposição de forma a ajustarem suas funções de custos de produção e capacidade máxima. Ao escolherem os projetos nos quais investirão, as empresas levam em consideração a incerteza da demanda e as decisões de outras empresas do mercado, que agem de forma não cooperativa. Assume-se que a estratégia de cada empresa, ou seja, a decisão de expansão de capacidade depende tão somente do estado atual do mercado, o qual no referido modelo é descrito pela variação da demanda e pela capacidade total do mercado em cada período do horizonte de planejamento.

O equilíbrio resultante de tais estratégias resulta em um Equilíbrio Perfeito de Markov. Como a estratégia ótima de uma empresa em um dado período é dependente das estratégias de todas as empresas definidas simultaneamente, podem existir mais de um equilíbrio no período em questão. Para garantir um único equilíbrio, é considerada a premissa mencionada anteriormente de que as empresas investem sequencialmente. Ou seja, a cada período de tempo somente uma das empresas tem a oportunidade de decidir se investirá em um ou mais dos projetos à sua disposição. Sendo assim se está diante de um jogo sequencial onde os jogadores se movem um a cada tempo. Tal jogo tem um único equilíbrio perfeito em subjogo<sup>8</sup>.

O estado do sistema em determinado período de tempo  $t$  é descrito pelo vetor  $K^t = [X_t, I_{t,1}, \dots, I_{t,M}, U_t]$ , onde  $X_t$  é a variável estocástica da demanda no tempo  $t$ ,  $I_{t,i}$  é a capacidade acumulada da empresa  $i$  até o período de tempo  $t$  e  $U_t$  é a variável que determina qual é a empresa da vez para decidir sobre seu investimento no tempo  $t$ , conforme a premissa de investimento sequencial. O custo de produção é dado por  $C_i = C_i(q_i, I_{t,i})$ . Onde  $q_i$  é o nível de produção da empresa  $i$  no período  $t$ .

---

<sup>8</sup> Um equilíbrio de Nash é um equilíbrio perfeito em subjogo se as estratégias dos jogadores constituem um equilíbrio de Nash em todo subjogo (Fudenberg & Tirole, 1991). Para maiores detalhes ver seção 3.3.4 deste trabalho.

O nível de produção total da indústria no tempo  $t$  é, portanto,  $Q(X_t, I_{t,1}, \dots, I_{t,M}) = \sum_{i=1}^M q_i(X_t, I_{t,1}, \dots, I_{t,M})$  e o preço da commodity é definido pela função inversa da demanda  $P(Q(X_t, I_{t,1}, \dots, I_{t,M}), X_t)$ . Portanto, o lucro da empresa  $i$  no período  $t$  é dado por:

$$\pi_{t,i} = q_i(K^t)P(Q(X_t, I_{t,1}, \dots, I_{t,M}), X_t) - C_i(q_i(X_t, I_{t,1}, \dots, I_{t,M}), I_{t,i}) \quad (2.1)$$

Seja  $S_i^t(K^t)$  a estratégia da empresa  $i$  no tempo  $t$  dado o estado  $K^t$ . A estratégia  $S_i^t$ , é um conjunto de projetos escolhidos pela empresa  $i$  no tempo  $t$ , tal que,

$$I_{t+1,i} = I_{t,i} \cup S_i^t(K^t) \quad (2.2)$$

Ou seja, a capacidade no tempo  $t+1$ , é equivalente à capacidade acumulada até o período  $t$ ,  $I_{t,i}$ , somada à capacidade adicionada no próprio período  $t$ ,  $S_i^t(K^t)$ . E, dado que as variáveis  $X_t$  e  $U_t$  descrevem processos estocásticos da demanda e da sequência de empresas que se movem a cada período de tempo, respectivamente, têm-se,

$$\text{Prob}\{X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t\} = f_t(x_t, x_{t+1}) \quad (2.3)$$

$$\text{Prob}\{U_{t+1} = u_{t+1} \mid U_t = u_t\} = g_t(u_t, u_{t+1}) \quad (2.4)$$

Onde  $x_{t+1}$  é a variação estocástica da demanda em unidades de medida de expansão da capacidade no período  $t+1$  podendo ser positiva ou negativa e,  $u_{t+1}$  é o valor que determina qual empresa deverá tomar a decisão de investimento no instante  $t+1$ . Por exemplo, se  $u_{t+1} = 1$ , a empresa 1 é a da vez, se  $u_{t+1} = 2$ , a empresa 2 é a da vez, e assim por diante.

As equações (2.2), (2.3) e (2.4), resumizam a regra de transição de estados do modelo. A equação (2.2) descreve como as capacidades das empresas evoluem de acordo com suas estratégias, considerando-se uma dada realização dos processos  $X$  e  $U$ . As equações (2.3) e (2.4) descrevem a evolução dos processos  $X$  e  $U$ , respectivamente.

As empresas seguem uma política ótima tomando decisões que maximizam o valor presente líquido esperado do fluxo de caixa ao longo de todo o horizonte de planejamento. Um problema de programação dinâmica, utilizando a equação recursiva de Bellman<sup>9</sup>, é utilizado para a solução do problema,

$$Z_{t,i}^*(K^t) = \max_{S_i^t(K^t)} \left\{ \pi_{t,i}(K^t) - \sum_{S_i^t(K^t)} \varphi_{t,i}(S_i^t) + \delta \left\{ E_{X,U} \left( Z_{t+1,i}^*(K^{t+1}) \right) \right\} \right\} \quad (2.5)$$

Onde  $\pi_{t,i}(K^t)$  é o lucro imediato definido pela equação (2.1),  $\varphi_{t,i}(S_i^t)$  é o custo do investimento quando a estratégia escolhida é  $S_i^t$  e  $\delta$  é o fator de desconto de um período do fluxo de caixa. A notação  $E_{X,U}(A)$  representa o valor esperado da variável  $A$  em relação às distribuições de probabilidades das variáveis  $X$  e  $U$ .

O jogo entre as empresas, cada qual decidindo por estratégias que maximizem seus lucros esperados, é conduzido a um equilíbrio de Nash.

O equilíbrio de Nash é um plano ótimo descrito por  $S^* = [S_1^*, ..., S_i^*, ..., S_n^*]$ , onde o componente  $S_i^*$  é um vetor com o plano ótimo da empresa  $i$  para cada período do horizonte de planejamento, tal que,

---

<sup>9</sup> A equação recursiva de Bellman é apresentada na seção 3.2 e provém do “Princípio de Bellman” que afirma que para cada estado e ação, o plano ótimo deve consistir de uma determinada ação seguida do plano ótimo até o estado sucessor (Bellman, 1957).



$$Z_{t,i}(K^t, S^*) \geq Z_{t,i}(K^t, S_1^*, \dots, S_i, \dots, S_n^*) \quad (2.6)$$

$$\forall i, \forall t, \forall K^t, \forall S_i.$$

Em um jogo estocástico como o apresentado nesta seção, as estratégias são chamadas de Markovianas e o equilíbrio resultante é um Equilíbrio Perfeito de Markov (Murto et al., 2004), cujos conceitos de serão detalhados na seção 3.4 desta tese.

Na primeira parte deste capítulo foi apresentada uma evolução cronológica da literatura de expansão de capacidade relatando-se as diferentes formulações e técnicas utilizadas e citando-se as indústrias nas quais tais técnicas foram largamente aplicadas. Em seguida foram apresentadas as correntes da literatura que permeiam o problema da expansão de capacidade e em que situações tais correntes se confundem.

Também foram apresentadas algumas das principais correntes da literatura utilizadas na modelagem de problemas de expansão de capacidade de produção. Por fim, foi apresentada, de forma gráfica, a literatura foco desta pesquisa. Tendo este foco em vista, será apresentado em maiores detalhes, no próximo capítulo, o arcabouço teórico a ser utilizado no desenvolvimento do modelo proposto desta tese.



### **3. FERRAMENTAL TEÓRICO**

#### **3.1. INTRODUÇÃO**

Este capítulo apresenta o ferramental teórico que será utilizado no desenvolvimento do modelo de expansão de capacidade proposto nesta pesquisa. Na seção 3.2, descreve-se os princípios de otimização utilizando a Programação Dinâmica, a qual se associa às decisões sequenciais, tais como em uma política de investimento em expansão de capacidade ao longo do tempo. Na seção 3.3, serão apresentados alguns conceitos de teoria dos jogos, especialmente os conceitos de equilíbrio de Nash, jogos sequenciais na forma extensiva e o equilíbrio perfeito em subjogo. Tais conceitos serão apropriados para modelar situações dinâmicas como no problema apresentado nesta tese, no qual, em condições especiais, a Programação Dinâmica pode ser utilizada para obtenção da solução. Na seção 3.4 será apresentada uma classe de jogos que considera o que se chama de estratégias Markovianas para decisões em um ambiente de incerteza e, então, será apresentado o Equilíbrio Perfeito de Markov, considerado na literatura (Furdenberg e Tirole, 1991) um refinamento do equilíbrio de Nash. Finalmente, na seção 3.5 será introduzido o Equilíbrio Espacial de Mercados, conceito que, utilizado integradamente com a Programação Dinâmica, equilíbrio perfeito em subjogo e o Equilíbrio Perfeito de Markov, formam o arcabouço teórico do modelo proposto nesta pesquisa.

#### **3.2. PROGRAMAÇÃO DINÂMICA**

##### **3.2.1. Mecanismo e Terminologia**

A otimização de problemas cujas decisões afetam períodos futuros do horizonte de planejamento tem sido aplicada em diferentes áreas, desde em simples sistemas de controle de aquecimento até em gestão de economias inteiras de países, passando por operação de tráfego aéreo, aquisição de novos equipamentos, expansão de capacidade, roteamento de veículos, gestão de ativos, gestão de portfólios de investimentos, entre várias outras aplicações.

A Programação Dinâmica (PD) é largamente utilizada na solução de tais problemas, determinísticos ou estocásticos, através de uma técnica que desdobra um problema de grande dimensão em vários pequenos problemas. Basicamente, tais problemas implicam em tomar decisões e então observar a informação pertinente. Em seguida, tomar

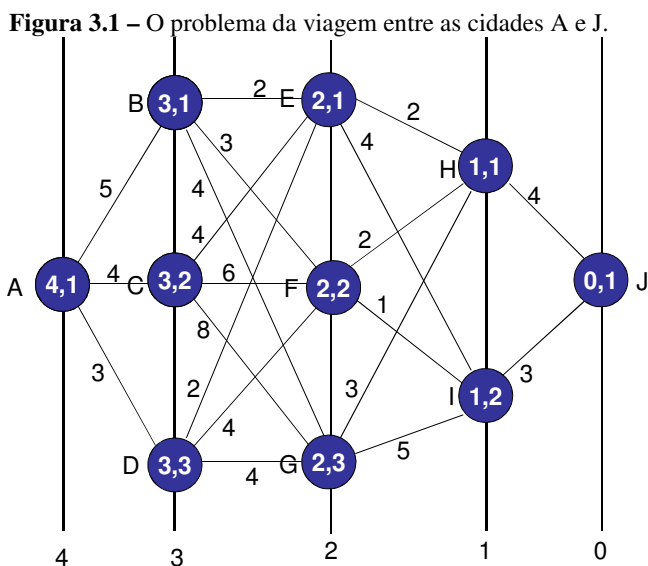
mais decisões e voltar a observar a informação pertinente, e assim por diante. Em função disso, são conhecidos como problemas de decisões sequenciais e podem ser relativamente simples de formular, mas dependendo do problema que está sendo modelado, a solução pode se tornar bastante complexa.

Neste momento é importante que se faça uma breve descrição dos principais elementos, ou terminologia, do método de Programação Dinâmica. Para fins de apresentação dos conceitos fundamentais de programação dinâmica será considerado um sistema com variáveis de estado discretas e período de otimização finito. O foco será em problemas determinísticos, ou seja, não estocástico. Estes problemas consistem nos seguintes elementos:

- Estágios: são os diferentes níveis naturais que se pode dividir um problema. Em cada um deles se estabelece um plano de decisões. Normalmente estes estágios são representados pelo tempo que pode ser contínuo ou discreto (períodos).
- Variável de estado: é a variável que capta todas as informações que se necessita para a tomada de decisão, bem como a informação que se precisa para descrever como o sistema evolui ao longo do tempo. Cada estágio terá associado um número de estados que pode ser finito ou infinito, dependendo das variáveis que representam as condições do sistema.
- Variável de Decisão: para cada estado possível do sistema, uma decisão pode ser tomada fazendo com que o sistema passe a outro estado em um próximo estágio. Cada decisão, portanto, afeta uma ou mais variáveis chamadas de variáveis de decisão e causa uma transição de estado.
- Plano: é um conjunto de decisões, no qual para cada estado é especificada uma ação. Um plano ótimo é o melhor conjunto de ações considerando o objetivo fixado.
- Informação Exógena: é a informação que se torna conhecida a cada período de tempo. O estado inicial do sistema também deverá ser conhecido.
- Função de transição de estado: esta função determina como o sistema evolui do estado  $S_t$  para o estado  $S_{t+1}$ , dada a decisão tomada no tempo  $t$  e a nova informação que chegou entre o tempo  $t$  e o tempo  $t+1$ .
- Função de contribuição: esta função determina os custos incorridos ou ganhos recebidos durante cada intervalo de tempo.

- Valor de Estado: é uma função dos retornos gerados, quando o sistema evolui de um estado inicial para o estado final, dada uma política adotada. O valor de estado em um plano ótimo é o valor de estado ótimo.
- Objetivo: determinar o plano ótimo, que resulta no melhor retorno.

Para fins de exemplificação da terminologia considere o problema clássico do viajante que tem como objetivo minimizar a distância percorrida para se deslocar de uma cidade de origem A para outra cidade destino J, tendo de tomar decisões de destinos intermediários a cada estágio, conforme ilustrado na figura 3.1. O sistema, em geral, pode ser representado por nós de uma rede, que representam os estados e cujos arcos representam as possíveis transições. Os números associados a cada arco representam os retornos. Os nós da rede são denotados pelas variáveis de estado e estágio. De uma forma geral, o  $i$ -ésimo estado do estágio  $n$  é denotado por  $(n,i)$  (Hastings, 1973).



Fonte: adaptado de Hastings (1973).

Associado a cada estado  $(n,i)$ , existe um conjunto  $K_{n,i}$  de ações viáveis, denotado por  $K_{n,i} = \{1,2,...,k,...,k_{n,i}\}$ . Deste conjunto, caberá ao tomador de decisões escolher a ação mais adequada, segundo um critério estabelecido. No caso do problema do viajante, o critério é o da menor distância. De acordo com a figura 3.1, portanto, ao se considerar o estado  $(0,1)$ , por exemplo, as ações viáveis são viajar do ponto I ao ponto J ou do ponto H ao ponto J.

Em geral, o sucessor de um estado é determinado por uma função de transição  $t$ , que depende do estágio, estado corrente e da decisão tomada e pode ser denotado por um função  $t(n,i,k)$ .

Quando uma ação  $k$  é escolhida em um estado  $(n,i)$ , o retorno no corrente estágio é determinado por uma função  $r(n,i,k)$ . O valor do estado  $(n,i)$ , sob uma política ótima é denotado por  $f(n,i)$  que é a função do valor ótimo de cada estado.

### 3.2.2. Condições de validação de modelos

Considere um sistema que em um dado estágio passa do estado  $(n,i)$  para o estado  $(n-1,j)$ , sob a ação  $k$ , e gera o retorno  $r(n,i,k)$ . Considere, ainda, que  $A_n$  é um plano genérico que determina a sequência de ações  $k_n, k_{n-1}, ..., k_1$ . Suponha que todo o processo tenha  $m$  estágios, e que se deseja maximizar a função de retornos dos estágios, ou seja, que se deseja obter o máximo valor de  $f(m,i)$  definido por:

$$f(m,i) = \underset{A_n \in W}{\text{Max}} \phi\{r(m,i_m,k_m),..., r(n,i_n,k_n),..., r(1,i_1,k_1)\} \quad (3.1)$$

Onde  $W$  é o conjunto de todos os possíveis planos que iniciam no estágio  $(m,i)$  e  $\phi$  um função particular para cada caso em questão. Para que este máximo seja obtido é preciso que as condições de separabilidade e de otimalidade sejam satisfeitas. Tais condições serão discutidas a seguir.

### **Condições de Separabilidade:**

A condição de separabilidade, a qual permite a aplicação da recursividade dado um determinado plano, tem o seguinte enunciado:

*Para todo plano, o valor de cada estado pode ser necessariamente calculado como uma função de retorno do estágio atual e do valor do estado subsequente.*

Seja o valor do estado  $(m, i_m)$  sob um plano  $A_m$  denotado por  $f(m, i_m, A_m)$ . Então,

$$f(m, i, A_m) = \phi\{r(m, i_m, k_m), \dots, r(n, i_n, k_n), \dots, r(1, i_1, k_1)\} \quad (3.2)$$

Se a condição de separabilidade é satisfeita, então, para cada estado  $(n, i_n)$  e um dado plano  $A_n$  pode-se escrever a equação (3.2) na forma:

$$f(n, i_n, A_n) = \varphi\{r(n, i_n, k_n), f(n-1, i_{n-1}, A_{n-1})\} \quad (3.3)$$

onde,

$$f(n-1, i_{n-1}, A_{n-1}) = \phi\{r(n-1, i_{n-1}, k_{n-1}), \dots, r(1, i_1, k_1)\} \quad (3.4)$$

Sendo  $\varphi$  e  $\phi$  funções particulares de cada caso em questão.

A condição apresentada na equação (3.3) pode ser demonstrada considerando-se que os retornos são descontados para um valor presente por um fator de desconto  $\delta$  para um estágio (período). Assim sendo, o valor do estado  $(m, i)$  para um plano dado  $A_m$  é dado por:

$$f(m, i_m, A_m) = r(m, i_m, k_m) + \delta.r(m-1, i_{m-1}, k_{m-1}) + \dots + \delta^{m-n}.r(n, i_n, k_n) + \dots + \delta^{m-1}.r(1, i_1, k_1) \quad (3.4b)$$

$$f(m, i_m, A_m) = \sum_{n=1}^m \delta^{m-n}.r(n, i_n, k_n) \quad (3.4c)$$

$$f(m, i_m, A_m) = \delta^0 . r(m, i_m, k_m) + \sum_{n=1}^{m-1} \delta^{m-n} . r(n, i_n, k_n) \quad (3.4d)$$

$$f(m, i_m, A_m) = r(m, i_m, k_m) + \delta . \sum_{n=1}^{m-1} \delta^{m-n-1} . r(n, i_n, k_n) \quad (3.4e)$$

$$f(m, i_m, A_m) = r(m, i_m, k_m) + \delta . f(m-1, i_{m-1}, A_{m-1}) \quad (3.4f)$$

A equação (3.4f) é da mesma forma que a equação (3.3), assim a condição de separabilidade é satisfeita.

### **Condições de Otimalidade:**

Considere o problema representado pela equação (3.1). A condição de separabilidade requer que o valor de cada estado possa ser calculado recursivamente para um dado plano. No processo iterativo na medida em que se calculam os valores de forma recursiva, se descartam os subplanos não ótimos em cada estado. Para isto ser válido, a seguinte condição deve ser satisfeita:

*Para cada estado e ação, o plano ótimo deve consistir de uma determinada ação seguida do plano ótimo até o estado sucessor.*

Esta condição é conhecida na literatura como princípio de Belmann (Belmann, 1957).

A seguir apresenta-se uma formulação algébrica da condição de otimalidade. Pela condição de separabilidade tem-se, para cada plano A:

$$f(n, i_n, A_n) = \phi \{ r(n, i_n, k_n), f(n-1, i_{n-1}, A_{n-1}) \} \quad (3.5)$$

Pode-se afirmar que um plano A consiste de uma ação k, seguida de um plano A do estágio n-1, conforme expressão que segue:

$$A_n = k_n + A_{n-1} \quad (3.6)$$

Tem-se então;

$$f(n, i_n, A_n) = f(n, i_n, k_n + A_{n-1}) \quad (3.7)$$



Seja  $A_{n-1}^*$  um plano ótimo para o estado  $(n-1, i_{n-1})$ , sucessor de  $(n, i_n)$  dado uma ação  $k_n$ . Dado que o problema seja de maximização, a condição de otimalidade requer que para cada estado  $(n, i_n)$ , ação  $k_n$  e plano  $A_{n-1}$ :

$$f(n, i_n, k_n + A_{n-1}^*) \geq f(n, i_n, k_n + A_{n-1}) \quad (3.8)$$

A inequação (3.8) é a sentença algébrica que garante a condição de otimalidade para o caso de otimização. Para o caso de minimização, basta trocar o sinal para  $\leq$ .

Deste modo, as condições de separabilidade e de otimalidade, permitem incorporar ao modelo proposto nesta tese a interdependência de decisões de investimentos tomadas ao longo do horizonte de planejamento. A equação recursiva da Programação Dinâmica será utilizada para o cálculo do valor ótimo do investimento a cada período e determinação do plano ótimo de decisões, conforme será apresentado na seção 4.2.

### 3.3. JOGOS DINÂMICOS COM INFORMAÇÃO COMPLETA

#### 3.3.1. Introdução

Os conceitos básicos da teoria dos jogos, necessários para um melhor entendimento desta seção, são apresentados no Apêndice A deste trabalho. Jogos dinâmicos são jogos que ocorrem em vários estágios, ou períodos de tempo, e se quer determinar o retorno ao final do jogo, após vários períodos jogados. Boa parte das aplicações de teoria dos jogos em economia requer esta estrutura de jogo dinâmico, como no exemplo clássico do jogo de duas empresas, uma entrante e a outra já operando no mercado, conforme ilustrado no Apêndice A. A literatura usa o conceito de “jogos na forma extensiva” para modelar tais situações (Fudenberg e Tirole, 1991). Jogos de informação completa, por sua vez, são jogos cujas ações dos concorrentes podem ser observadas a cada estágio (Maskin e Tirole, 2001).

### 3.3.2. O Equilíbrio de Nash de um jogo multiestágio

Os estágios de um jogo são frequentemente tratados na literatura como períodos de tempo. Definem-se jogos multiestágio com ações observadas como sendo uma situação de jogo onde: (a) os jogadores conhecem as ações tomadas em todos os estágios  $0, 1, 2, \dots, t-1$  ao escolherem suas ações no estágio  $t$  e (b) todos os jogadores se movem simultaneamente em cada estágio  $t$ . Diz-se, portanto, que jogadores se movem simultaneamente no estágio  $t$  se cada jogador escolhe sua ação no estágio  $t$  sem conhecer a ação de outros jogadores neste mesmo estágio.

Jogos simultâneos incluem também jogos em movimentos alternados, ou sequenciais, assumindo-se que os jogadores, exceto o jogador que tomará a decisão, em um determinado estágio têm uma única possibilidade de escolha que é a decisão de “nada a fazer”. O jogador da vez, no entanto, tem múltiplas possibilidades. Por exemplo, o jogo de Stackelberg (Sherali et al., 1983) tem dois estágios. No primeiro estágio, o líder escolhe o nível de produção e o seguidor nada faz. No segundo estágio, o seguidor sabe o nível de produção escolhido pelo líder e escolhe o seu nível de produção enquanto que o líder, por sua vez, nada faz. O jogo de Cournot, por sua vez, detalhado mais adiante neste capítulo, é um exemplo de jogo de um único estágio onde todos os jogadores escolhem suas ações de uma só vez e o jogo termina.

No primeiro estágio de um jogo multiestágio, todos os jogadores  $i = \{0, 1, \dots, M\}$  escolhem suas ações simultaneamente de um conjunto de ações (ou estratégias) disponíveis  $A_i(h^0)$ . Uma dessas ações pode ser a ação de “nada fazer”. Seja  $h^0 = \phi$ , o histórico de ações no início do jogo. Ao fim de cada estágio, todos os jogadores observam as ações tomadas por todos os jogadores até aquele período.

Seja  $k^0 \equiv (k_1^0, \dots, k_M^0)$ , o perfil de ações (ou estratégias) do estágio 0. No começo do estágio 1, os jogadores conhecem o histórico de ações  $h^1$ , que é identificado por  $k^0$ , dado que  $h^0$  é trivial. As opções de ações à disposição do jogador  $i$  no estágio 1 dependem do que ocorreu antes. Por exemplo, se uma empresa tem uma sequência de projetos de expansão de capacidade à sua disposição, os projetos realizados saem de seu portfólio de projetos a realizar.

De uma forma geral, seja  $h^{t+1}$ , a sequência de ações dos períodos anteriores,  $h^{t+1} = (k^0, \dots, k^t)$ , seja ainda  $A_i(h^{t+1})$ , as ações viáveis do

jogador  $i$  no estágio  $t+1$ , quando o histórico é  $h^{t+1}$  e, considerando-se  $T+1$  o número total de estágios no jogo,  $H^{T+1}$ , é o conjunto de todas as possíveis sequências de histórias do início ao final do jogo.

Logo, diz-se que uma estratégia pura para o jogador  $i$  é um plano de como jogar em cada estágio  $t$  para uma possível história  $h^t$ .

Dado que  $H^t$  é o conjunto de todas as histórias possíveis no estágio  $t$ , e considerando que  $A_i(H^t) = \bigcup_{h^t \in H^t} A_i(h^t)$ , uma estratégia pura do

jogador  $i$  é um mapa de sequências  $\left\{ s_i^t \right\}_{t=0}^T$  onde cada  $s_i^t(h^t) \in A_i(h^t)$

para todo  $h^t$ . A sequência de ações geradas por um perfil de tais estratégias é assim definida: no estágio  $t=0$  as ações são  $a^0 = s^0(h^0)$ , no estágio  $t=1$  as ações são  $a^1 = s^1(a^0)$ , as ações no estágio 2 são  $a^2 = s^2(a^0, a^1)$  e assim por diante. Tal sequência é chamada o caminho do perfil da estratégia. O retorno de cada jogador é representado pela função  $z_i : H^{T+1} \rightarrow \mathfrak{R}$ . Na maioria das aplicações, as funções de retorno de cada jogador é uma média ponderada dos retornos de cada estágio.

Dado que se pode associar um resultado em  $H^{T+1}$  para cada perfil de estratégia e um vetor de retornos para cada resultado, pode-se obter o retorno para qualquer perfil de estratégia. Representa-se o vetor de retornos como  $z(s)$ , sendo  $s$  o perfil da estratégia.

Um equilíbrio Nash neste contexto é apenas um perfil de estratégia  $s$  tal que nenhum jogador  $i$  pode melhorar seu retorno com uma estratégia diferente, ou seja,

$$z_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq z_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \text{para todo } s_i \quad (3.9)$$

### 3.3.3. Jogos Sequenciais e a programação dinâmica reversa

Em um jogo de dois jogadores, onde o jogador 1 se move antes do jogador 2, é simples identificar a decisão ótima do jogador 2 dado que a decisão do primeiro é conhecida. Isto permite que se resolva o equilíbrio identificando a decisão ótima do jogador 2, no período seguinte, para cada possível escolha do jogador 1 e, então, de forma reversa se determine a escolha ótima do jogador 1. Este algoritmo pode

ser aplicado para outros jogos onde um único jogador move-se a cada período.

Diz-se que um jogo multiestágio tem informação perfeita se, para cada estágio e história  $h^t$ , exatamente um jogador tem um conjunto de opções, com pelo menos mais de um elemento à sua disposição, e o resto dos jogadores tem apenas uma opção que é “nada a fazer”. Um exemplo simples deste jogo seria um jogo onde o jogador 1 se move nos estágios 0,2,4,... e o jogador 2 se move nos estágios 1,3,5, ... . De forma geral, diz-se que são jogos em que alguns jogadores podem se mover por diversas vezes em uma fila, e que o movimento no estágio  $t$  depende da história anterior do jogador. Ou seja, somente um jogador move-se a cada estágio  $t$ . Cada jogador conhece as escolhas passadas de todos os outros jogadores rivais, isto significa que o único jogador que se move no estágio  $t$  é perfeitamente informado de todos os aspectos do jogo exceto daquilo que ocorrerá no futuro.

A Programação Dinâmica pode ser aplicada em jogos finitos de informação perfeita, onde finito significa que o número de estágios é finito e o número de ações possíveis em qualquer estágio é também finito. O algoritmo inicia determinando as escolhas ótimas no último estágio  $T$  para cada história  $h^T$ , ou seja, a ação do jogador da vez, dada a história  $h^T$ , que maximiza o retorno do jogador condicionado à história  $h^T$ . Assim, repete-se a operação para o estágio  $K-1$  e determina-se a ação ótima para o jogador que se move neste estágio, dada a ação escolhida para o estágio  $K$ . O algoritmo segue retroativamente até o estágio 0. Neste ponto, tem-se um perfil de estratégia e este perfil é um equilíbrio de Nash (Furdenberg e Tirole, 1991, pag. 72).

### 3.3.4. Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo

Um subjogo é parte de um jogo, porém, tem algumas características particulares, conforme seguem.

- (a) Inicia com um conjunto de informação que contém apenas um nó de decisão.
- (b) Contém todos os nós de decisão e nós terminais que seguem aquele nó de decisão, mas não contém os nós de decisão ou nós terminais que não estão na mesma sequência daquele nó de decisão.

- (c) Um subjogo não pode conter apenas parte de um conjunto de informação. Ou seja, se o conjunto de informação tiver mais de um nó de decisão, o subjogo deverá conter todos estes nós de decisão deste conjunto de informação.

Tecnicamente, o jogo inteiro é um subjogo, porém, algumas vezes se quer focar em subjogos que não são o jogo inteiro. Um subjogo que não é o jogo inteiro chama-se de subjogo próprio. Se existem  $x$  subjogos próprios em um jogo particular, existirão  $x+1$  subjogos, incluindo o subjogo inteiro.

A idéia por trás do conceito de subjogo perfeito é identificar o menor, ou o último subjogo que contenha nós terminais. O menor subjogo não deve conter outros subjogos.

No jogo do incumbente e o entrante, por exemplo, ilustrado no apêndice A (fig. A.1), existe um único subjogo próprio, ou seja, aquele jogo que inicia no nó de decisão do incumbente. Neste nó de decisão, o incumbente (segundo nível da árvore) deve escolher entre “lutar” ou “se acomodar”.

O incumbente sempre escolherá a decisão “se acomodar” por que este implica em um retorno maior que o retorno associado com a decisão “lutar”. Assim sendo, a estratégia “lutar” é eliminada do conjunto de soluções viáveis. Dado que o jogo é de informação perfeita, o entrante sabe que o incumbente nunca escolherá a estratégia “lutar” quando este for forçado a tomar uma decisão. Então o entrante pode remover o ramo da árvore referente à decisão de “lutar”.

Segue-se então no exemplo para o próximo subjogo, que é o jogo que inicia no nó inicial. Se o entrante escolher “permanecer de fora” ele ganhará um retorno de valor 0. Se o entrante escolher “entrar” ele sabe que terá um retorno de valor 2, porque o entrante sabe que o incumbente nunca escolherá a estratégia “lutar”. O entrante então escolherá a estratégia “entrar” no nó inicial, dado que o retorno é maior. Desta forma, o equilíbrio (“entrar, “se acomodar”) é o único resultante deste processo de refinamento de Nash através de subjogo perfeito.

Enquanto todo equilíbrio perfeito em subjogo é um equilíbrio de Nash, nem todo equilíbrio de Nash é um equilíbrio perfeito em subjogo.

Observa-se que a definição de um subjogo perfeito implica que todo o jogador age de forma ótima a cada subjogo. Logo, no exemplo citado, o equilíbrio representado pelas decisões (“ficar de fora”, “lutar”) não é um equilíbrio perfeito em subjogo porque o incumbente ao escolher lutar não está respondendo de forma ótima.

O subjogo perfeito elimina ameaças não críveis, o que equivale à decisão de “lutar” para o incumbente. A única maneira do incumbente manter o entrante fora do jogo é ameaçar “lutar”, mas uma vez o entrante decidindo entrar no jogo, o incumbente desiste desta ameaça, logo a decisão de lutar é, neste jogo, uma escolha não crível.

**Definição 3.1** – Um equilíbrio de Nash é um equilíbrio perfeito em subjogo se as estratégias dos jogadores constituem um equilíbrio de Nash em todo subjogo.

Conforme mostrado em Fudenberg e Tirole (1991), todo o jogo finito de informação perfeita tem um equilíbrio de Nash perfeito em subjogo cuja solução pode ser obtida por indução “reversa”. Portanto, se nenhum jogador tem o mesmo retorno em qualquer dos nós terminais, existirá uma única solução para o equilíbrio perfeito de Nash em subjogo e que pode ser determinada por programação dinâmica “reversa”. O referido postulado apresenta dois aspectos fundamentais. Primeiro o jogo tem que ser finito, onde finito significa que o número de períodos é finito e o número de ações possíveis em cada período também é finito. Segundo, o jogo tem que ser de informação perfeita, implicando que não existe nenhum conjunto de informação com múltiplos nós de decisão. Se tais condições são cumpridas então se sabe que existe ao menos um equilíbrio perfeito de Nash em subjogo. No modelo proposto no capítulo 4 será utilizado tais aspectos fundamentais para garantir a unicidade da solução.

Em jogos estocásticos, a variável de estado seguindo um processo estocástico (como por exemplo, o preço de uma commodity ou, no caso do modelo proposto nesta tese, a sequência aleatória em que os jogadores se alternam na tomada de decisão), aumenta o problema de multiplicidade de equilíbrios. Assim sendo, é usualmente utilizado na análise de tais jogos um tipo de equilíbrio chamado de equilíbrio de Markov (Dias, 2005). Equilíbrios de Markov são também perfeitos em subjogos, chamados de equilíbrios perfeito de Markov (EPM), como será visto a seguir.

#### 3.4. EQUILÍBRIO PERFEITO DE MARKOV (EPM)

Vários exemplos de jogos dinâmicos, cujos conceitos foram apresentados na seção 3.3, podem ser enquadrados na categoria de jogos repetidos, onde o ambiente físico é o mesmo em todo período. Jogos repetidos é uma classe de jogos dinâmicos nos quais os jogadores

enfrentam um jogo a cada período e o retorno dos jogadores ao final do horizonte de tempo é uma média ponderada dos retornos em cada estágio. Dado que em jogos repetidos as ações passadas não influenciam no conjunto de ações viáveis ou no valor presente da função de retorno das estratégias, este tipo de jogo não pode ser utilizado para modelar fenômenos importantes da vida real tais como investimentos em instalações.

Será apresentada nesta seção, uma classe de jogos onde o passado tem uma influência direta sobre as escolhas atuais, como por exemplo, ao se determinar o nível de capacidade instalada de uma fábrica. Tais ambientes podem ser modelados como jogos de tempo discreto, que é o foco do problema desta pesquisa, ou jogos de tempo contínuo, chamados também na literatura de jogos diferenciais (Fudenberg e Tirole, 1991). Estes jogos consideram o que se chama de estratégias Markovianas, onde o passado influencia o jogo presente somente através de seu impacto sobre uma variável de estado que incorpora todo o efeito do passado em seu valor presente.

Na teoria dos jogos, o conceito de EPM, um refinamento do equilíbrio de Nash, é bastante popular entre pesquisadores, em função basicamente de três razões. Em primeiro lugar, o EPM é em geral eficaz em eliminar ou reduzir um grande número de equilíbrios em jogos dinâmicos, assim, aumentando o poder de previsão do modelo. As variáveis não relevantes para o comportamento estratégico do jogador não são levadas em consideração. Em segundo lugar, as estratégias de Markov reduzem substancialmente o número de parâmetros a serem estimados em modelos econométricos. Finalmente, modelos Markovianos podem facilmente serem simulados.

### **3.4.1. Definição e Existência de um EPM**

Em um jogo estocástico a história em cada estágio pode ser sumarizada por um estado, por exemplo, o nível de capacidade de uma fábrica. O retorno do estágio atual depende deste estado e de ações presentes, por exemplo, de investimentos em expansão de capacidade. O estado segue um processo de Markov, pois existe uma distribuição de probabilidade,  $p(n, i, j, k)$ , em cada estágio  $n$ , que descreve as chances do sistema evoluir para o estado  $j$ , dado que se encontra no estado  $i$  do estágio  $n$ , e que foi tomada a decisão  $k$ . Esta probabilidade de decisão não depende da história passada. De fato, cada decisor irá observar o estado atual e tomar sua decisão. O estado futuro dependerá, portanto,

do estado atual e da ação tomada naquele estágio, independente de decisões tomadas no passado.

O EPM pode ser definido, de acordo com Maskin e Tirole (2001), como um jogo multistágio com ações observadas (informação completa), conforme apresentado na seção 3.3. Existem  $T$  períodos ( $t=1, \dots, T$ ) onde  $T$  é finito ou infinito. Na data  $t$ , o jogador  $i = (1, \dots, M)$  conhece o histórico de ações escolhidas até o período  $t-1$ ,  $h^t = (a^0, \dots, a^{t-1})$ , onde  $a^t = (a_1^t, \dots, a_M^t)$ , e escolhe uma ação  $a_i^t$  em um conjunto finito de ações  $A_i^t(h^t)$ . Seja  $H^t$  o conjunto de todas as possíveis histórias do período  $t$ . Seja, também,  $g^t$  um vetor com a ação do período atual e com as ações dos períodos futuros, ou seja,  $g^t = (a^t, \dots, a^T)$ . As preferências<sup>10</sup> do jogador  $i$  são representadas pela função utilidade  $z_i(a) = z_i(h^t, g^t)$ .

Uma estratégia  $s_i$  para o jogador  $i$  é uma função que, para todo  $t$  e cada história  $h^t \in H^t$ , associa uma distribuição de probabilidade ao espaço de ações  $A_i^t(h^t)$ , ou seja,  $s_i(h^t) \in \Delta(A_i^t(h^t))$ , onde  $\Delta(X)$  é o conjunto de distribuição de probabilidades do conjunto  $X$ . Seja  $S_i$  o conjunto de estratégias para o jogador  $i$ . Dado  $t$  e  $h^t \in H^t$ , seja  $S_i^t(h^t)$  o conjunto de estratégias de continuação, ou seja, no subjogo do período  $T-t+1$ , que se inicia depois de  $h^t$ . Denota-se o vetor de estratégias dos jogadores rivais de  $i$ , como sendo  $s_{-i}$  e o vetor de todas as estratégias como sendo  $s = (s_i, s_{-i})$ .

Dado o vetor de estratégia  $s$ , o valor esperado da função utilidade é  $z_i(s) \equiv E_a(z_i(a) | s)$ . A utilidade esperada condicionada a história  $h^t$  é dada por,

$$v_i(s | h^t) \equiv E_{g^t}(z_i(h^t, g^t) | s). \quad (3.10)$$

---

<sup>10</sup> Assume-se que os jogadores têm preferências Newmann-Morgenstern em relação às suas decisões. Ver Cusinato (2003), capítulo 2, para um maior detalhamento sobre os axiomas de Newmann-Morgenstern.



Ou seja, o valor de  $v_i(s | h^t)$  é o retorno esperado do jogador  $i$ , após a história  $h^t$ , dado que os jogadores se comportam conforme a estratégia  $s$ .

Um equilíbrio perfeito em subjogo é um vetor de estratégias  $s$  que forma um equilíbrio de Nash após qualquer história. Ou seja, para todo  $t$ ,  $h^t \in H^t$ , e  $i$ ,

$$v_i(s_i^*, s_{-i}^* | h^t) \geq v_i(s_i, s_{-i}^* | h^t), \text{ para qualquer } s_i. \quad (3.11)$$

O equilíbrio perfeito em subjogo refina o equilíbrio de Nash por eliminar as estratégias correspondentes às ameaças vazias ou não críveis.

**Teorema 3.1** – Existência de um EPM<sup>11</sup>

Supõe-se que  $T < \infty$ , ou que  $T = \infty$  e as funções objetivo são contínuas infinitamente<sup>12</sup>. Então existe um EPM.

Para classes de jogos com horizonte finito a prova da existência de um EPM é direta. Seja,  $t = (1, \dots, T)$ , onde  $T < \infty$ . Na data  $T$ , selecione um equilíbrio de Nash que é o mesmo para todas as histórias  $h^T$  no conjunto de histórias de mesmo retorno  $H^T(h^t)$ , dado que para todas as histórias com o mesmo retorno, os subjogos de último período são estrategicamente equivalentes e os conjuntos de equilíbrio de Nash são os mesmos. Retroativamente, o subjogo em  $T-1$  torna-se um jogo de um só período e pode-se selecionar um equilíbrio de Nash que dependa somente de  $H^{T-1}(h^{T-1})$  e assim por diante, por indução reversa, conforme visto na seção anterior.

Para uma classe mais geral de jogos como caracterizado nesta seção, o EPM permite estratégias mistas<sup>13</sup>. No entanto, para a classe de

---

<sup>11</sup> Este teorema está demonstrado em Fudenberg e Tirole (1991, pag. 504).

<sup>12</sup> O valor presente descontado de retornos por período é contínuo infinitamente se o fator de desconto é menor que 1 e se os retornos por período são limitados uniformemente.

<sup>13</sup> Quando uma solução EPM envolve estratégia mista significa que ao menos uma empresa não se decide por uma decisão pura, por exemplo, um único investimento, mas por entre várias decisões, cada qual associada a uma

jogos finitos e de informação perfeita existe um EPM com estratégias puras e a prova também é direta (Fudenberg e Tirole, 1991).

O conceito de Equilíbrio Perfeito de Markov será utilizado na formulação do modelo proposto nesta tese, no capítulo 4.

### 3.5. EQUILÍBRIO ESPACIAL DE MERCADOS

#### 3.5.1. Introdução

Na seção anterior, foram apresentados os conceitos de equilíbrio em jogos dinâmicos com informação perfeita, que serão utilizados para fundamentar o jogo de longo prazo do modelo a ser apresentado no capítulo 4. Nesta seção serão apresentados os conceitos para obtenção de um equilíbrio de um jogo de curto prazo, no qual, dadas as capacidades de cada empresa, as empresas competem entre si pelo nível de produção escolhido. Tais conceitos consideram o atendimento a vários mercados, distribuídos espacialmente e com estruturas de competitividade variadas, ou seja, podendo ser monopólio, oligopólio ou competição perfeita.

Conforme afirmam Pindyck e Rubinfeld (2010), uma empresa precisa saber quais os limites de seu mercado, ou seja, quem são os reais e potenciais competidores para os seus produtos, os produtos oferecidos e os limites geográficos deste mercado, a fim de fixar preços, determinar verbas de publicidade e tomar decisões de investimentos.

Em relação aos limites geográficos, o mercado de alguns produtos se restringe a uma fronteira geográfica bastante restrita. Um cidadão que deseja comprar um produto em um mercado, dificilmente se deslocará para outro mercado remoto para efetuar a transação em função dos custos de transporte. Alguns mercados são bastante restritos geograficamente, como é o caso do mercado imobiliário. A maioria das pessoas que trabalham no centro de uma cidade, procurará moradia a uma distância compatível com o seu deslocamento diário para o seu local de trabalho. Por sua vez, o mercado varejista de combustíveis veiculares é menos limitado em termos geográficos, porém tal mercado ainda é bastante regionalizado em função dos custos de transporte.

Alguns produtos, por outro lado, são comprados e vendidos no mercado mundial. A possibilidade de arbitragem – comprar a um preço baixo em uma localidade e vender a um preço mais alto em outra –

---

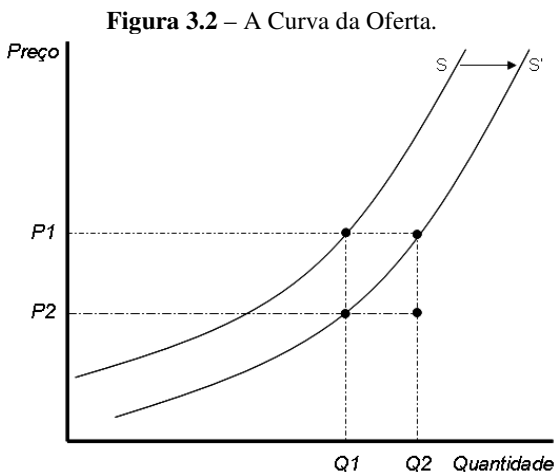
probabilidade. A soma das probabilidades é igual a 1 (Fudenberg e Tirole, 1991).

impede o surgimento de diferenças significativas entre os mercados e os custos do transporte podem ser relativamente baixos em relação ao seu valor, como é o caso do mercado do ouro.

A curva da oferta descreve a quantidade de mercadoria que os produtores estão dispostos a vender a um determinado preço, mantendo-se constante todas as outras variáveis que possam afetar a quantidade. Pode-se escrever esta relação entre a quantidade demandada e os preços através da seguinte equação:

$$S = S(P)$$

A figura 3.2 ilustra a curva de oferta, apresentando no eixo vertical do gráfico o preço da mercadoria e no eixo horizontal a quantidade total ofertada.



Fonte: adaptado de Pindyck e Rubinfeld (2010).

Conforme pode ser observado na figura 3.2, a curva de oferta  $S$ , é ascendente, porque quanto mais alto for o preço, maior será a capacidade e o desejo das empresas em produzir e vender. Se o custo de produção cai, por exemplo, a empresa poderá produzir uma mesma quantidade por um preço menor ou poderá produzir uma quantidade maior pelo mesmo preço. Ou seja, a curva de oferta  $S$  se desloca para a direita, representada pela curva  $S'$ , de menor custo de produção (Pindyck e Rubinfeld, 2010). Existem outras variáveis que afetam a quantidade ofertada, além do preço. Os custos de produção, os custos de

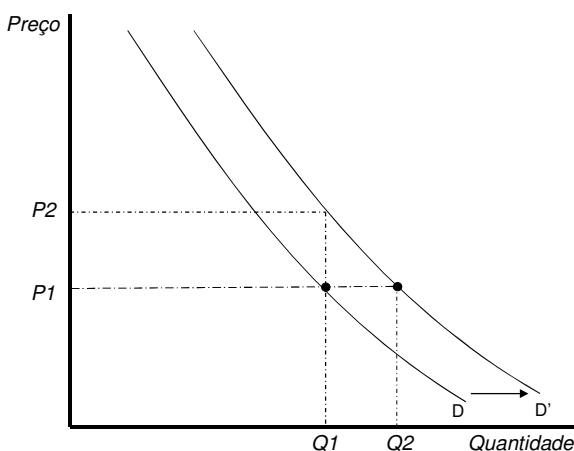
matéria prima e os custos de transportes são exemplos de variáveis que afetam a curva de oferta, fazendo-a deslocar-se.

A curva da demanda, por sua vez, descreve a quantidade que os consumidores desejam comprar à medida que muda o preço unitário. Pode-se escrever esta relação entre a quantidade demandada e os preços através da seguinte equação:

$$D = D(P)$$

A figura 3.3 ilustra a curva de demanda, apresentando no eixo vertical do gráfico o preço da mercadoria e no eixo horizontal a quantidade total demandada.

**Figura 3.3 – A Curva da Demanda.**



Fonte: adaptado de Pindyck e Rubinfeld (2010).

Como se pode observar, a curva de demanda é descendente, ou seja, na medida em que aumentam os preços, menor será a quantidade de consumidores que estarão dispostos a consumir o produto, e consequentemente menor será a quantidade demandada. A quantidade demandada pode também ser afetada por outras variáveis tais como a renda, os preços de outros bens ou até o clima. Para muitos produtos, se a renda aumenta, por exemplo, a quantidade demandada aumenta, fazendo a curva de demanda, D, se deslocar para a direita, se traduzindo em uma nova curva D'.

Considerando que o nível de produção de uma empresa seja  $q$ , o preço do produto seja  $P$  e que o custo de produção,  $C$ , também depende do nível de produção, o lucro da empresa  $\pi$ , é a diferença entre receita e custo:

$$\pi(q) = R(q) - C(q) \quad (3.12)$$

Onde,  $R(q) = q * P$ .

Para maximizar o lucro, a empresa escolhe o nível de produção para o qual a diferença entre receita e custo seja máxima. A curva da receita,  $R(q)$ , é uma linha que reflete o fato de que a empresa só consegue vender um volume maior de produto reduzindo o preço. A inclinação dessa curva é a *receita marginal*,  $RMg$ , a qual é a receita adicional que a empresa obtém quando o nível de produção aumenta em uma unidade. Por sua vez, a inclinação da curva de custo total é o *custo marginal*,  $CMg$ , que mede o custo adicional de produção de uma unidade a mais do produto. O custo total é maior que zero quando não há produção porque existem custos fixos no curto prazo.

Para obtenção do volume de produção que gera o lucro máximo, deriva-se a equação (3.12) pela quantidade produzida e iguala-se a zero:

$$d\pi/dq = dR(q)/dq - dC(q)/dq = 0 \quad (3.13)$$

Onde,  $dR(q)/dq$  é a receita marginal,  $RMg$ , e  $dC(q)/dq$  é o custo marginal,  $CMg$ . Assim sendo, pode-se concluir que o lucro é maximizado quando:  $RMg(q) = CMg(q)$ .

Um sistema está em equilíbrio quando as variáveis de estado que o descrevem não se modificam ao longo do tempo. Um sistema permanece em equilíbrio quando não existem forças atuantes que modificam as variáveis de estado deste sistema (Nagurney, 1999). As variáveis de estado que caracterizam o mercado são em geral as seguintes: preços, quantidades produzidas, quantidades transportadas e quantidades consumidas.

O equilíbrio de mercado dependerá da estrutura de mercado em que o produto está inserido e como estão distribuídos geograficamente os produtores e consumidores. Em um mercado perfeitamente competitivo, o grande número de vendedores e compradores garante que nenhum vendedor ou comprador em particular possa influenciar o preço.

De fato, nestes mercados, espera-se que todos os ofertantes e demandantes sejam tomadores de preços, de forma que nenhum deles se sinta capaz sozinho, ou em conjunto com outros, de alterar os preços praticados no mercado. Uma estrutura de mercado é dita de concorrência imperfeita quando os agentes envolvidos não são tomadores de preços, ou seja, conseguem afetar os preços de mercado propositalmente com suas ações, como é o caso do monopólio, em que existe um único ofertante no mercado. Pelo lado da oferta, entre a concorrência perfeita e o monopólio encontram-se duas outras estruturas de mercado típicas: a concorrência monopolística e os oligopólios (Krugman e Obstfeld, 1999).

Pode-se eventualmente assumir que o mercado é local, e que não há distâncias significativas separando o produtor do consumidor, portanto, não havendo que considerar quantidades transportadas. Porém, quando se reconhece a importância da distância geográfica entre os agentes produtores e consumidores e o custo de transporte associado com a movimentação dos produtos até a região de consumo, é necessário considerar um modelo de equilíbrio espacial.

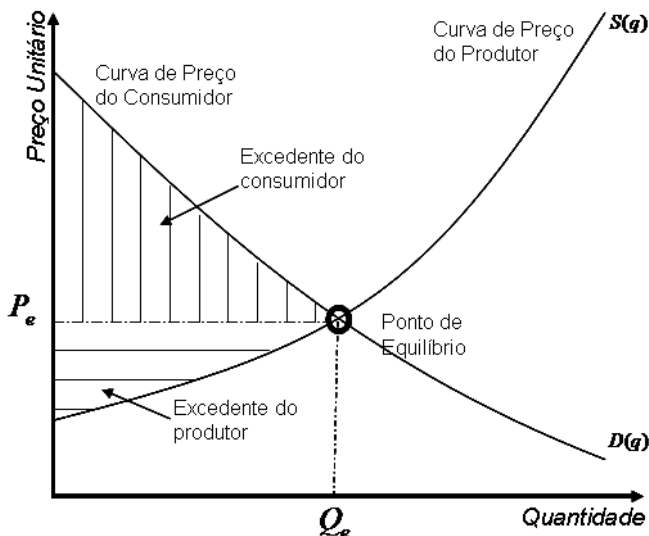
Nas seções 3.5.2, 3.5.3 e 3.5.4 serão apresentadas conceitos relativos às estruturas de mercado de competição perfeita, monopólio e oligopólio, respectivamente. Formulam-se os modelos, a seguir, considerando-se, inicialmente, um mercado único, centralizado, ou seja, sem espacialidade.

### **3.5.2. Equilíbrio na Concorrência perfeita**

Em um mercado perfeitamente competitivo, o grande número de produtores e consumidores de um produto garante que nenhum produtor ou consumidor em particular pode influenciar o preço. Quando o produtor e o consumidor disputam um preço em um mercado local, sem que exista limites de capacidade de produção, a curva de preço do consumidor pode ser interpretada como sendo a função que determina o preço unitário máximo que os consumidores estão dispostos a pagar, para um determinado nível de consumo. A curva de preço do produtor, por outro lado, identifica o preço unitário mínimo que os produtores estão dispostos a cobrar, para certo nível de produção. A condição de estabilidade é obtida no ponto de equilíbrio, ou seja, quando para um dado nível de preço observam-se quantidades ofertadas e demandadas iguais, conforme ilustrado na figura 3.4. Portanto, para um determinado preço praticado no mercado, abaixo do preço de equilíbrio, existirá uma quantidade ofertada por produtores menor que a quantidade demandada

pelos consumidores. Esta situação caracteriza a escassez de produto no mercado, o que acarreta um aumento no preço. Por outro lado, estando o preço do produto acima do preço de equilíbrio haverá uma quantidade demandada menor que a ofertada, causando um excesso de oferta no mercado, provocando uma redução no preço.

**Figura 3.4** – Ponto de equilíbrio para um produto em um mercado local.



Fonte: adaptado de Pindyck e Rubinfeld, 2010.

Este mecanismo faz com que o equilíbrio seja alcançado em um preço de mercado no qual o máximo que o consumidor está disposto a pagar corresponde ao mínimo que o produtor está disposto a receber por uma unidade marginal produzida.

A área da figura 3.4 em destaque, compreendida entre as curvas de preço do consumidor e do produtor, para uma determinada quantidade corresponde ao excedente da sociedade, que representa a economia obtida por produtores e consumidores no mercado em questão. No ponto de equilíbrio, o excedente da sociedade é máximo. Este excedente divide-se entre excedente do produtor e excedente do consumidor. O excedente do consumidor é o benefício total que os consumidores recebem ao adquirir um produto no mercado e é representado pela área situada entre a curva da demanda e a linha de

preço do mercado. Sob a perspectiva individual do consumidor é a diferença entre o preço que um consumidor estaria disposto a pagar por uma mercadoria e o preço que realmente paga. O excedente do produtor é uma medida análoga à do excedente do consumidor, porém referente aos produtores, e é representado pela área situada acima da curva da oferta até a linha de preço de mercado.

Na visão clássica da empresa, o seu acionista está preocupado com a maximização do valor presente dos fluxos econômicos que incorrem ao longo do tempo. Isto significa que o total dos fluxos atuais e futuros incorridos na operação precisam ser levados em conta por ocasião das decisões de uma expansão de capacidade ou de produção. Representando por  $R_t(q_t)$  as receitas totais esperadas para o período  $t$ , por  $C_t(q_t)$  os custos econômicos incorridos em  $t$  para a obtenção de tais receitas, e considerando uma taxa de juros constante e igual a  $r$  por período, o problema da empresa seria escolher a produção que maximizasse o valor presente da empresa,  $VP$ , dado pela equação a seguir.

$$\max_q VP = \sum_{t=0}^T \frac{R_t(q_t) - C_t(q_t)}{(1+r)^t} \quad (3.14)$$

A equação (3.14) traduz um objetivo importante da empresa que é maximizar o seu valor presente. No capítulo 4 deste trabalho volta-se a discutir esta equação ao se desenvolver o modelo do problema central desta pesquisa. Por enquanto, para introduzir o conceito de equilíbrio espacial em mercados competitivos considera-se o problema com um único período.

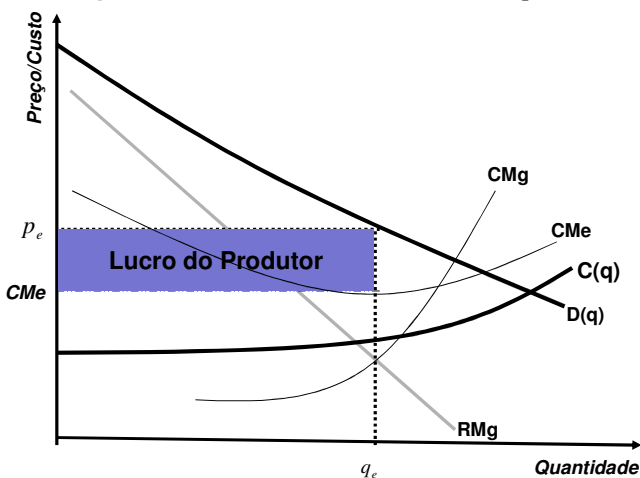
### 3.5.3. Equilíbrio no Monopólio

Em um mercado perfeitamente competitivo, o grande número de produtores e consumidores de um produto impede que algum deles possa influenciar o preço. O preço é determinado pelas forças do mercado da oferta e da demanda. A suposição da competição perfeita, porém, é uma premissa muito forte na análise de movimento de certas mercadorias. O monopólio se situa no extremo oposto da competição perfeita, na perspectiva do comportamento econômico. Esta situação verifica-se, em geral, em setores de atividades sempre que existe apenas um produtor e muitos compradores. Como o monopolista é o único



produtor do mercado, a curva de demanda da empresa é a própria curva de demanda do mercado, a qual relaciona o preço recebido pelo monopolista com a quantidade vendida no mercado. Em geral, em um mercado monopolizado, a quantidade ofertada será menor e o preço maior quando comparado com um mercado competitivo. O monopolista é o próprio mercado e controla totalmente a quantidade de produto a ser colocado à venda. Ele pode influenciar o preço e tende a operar com um preço mais elevado que o custo marginal. Entretanto, o monopolista nem sempre consegue cobrar o preço que deseja pelo produto. O problema típico de uma empresa monopolista é o de encontrar a quantidade ótima a ser produzida, que maximiza seus lucros, conhecendo-se a curva de demanda do mercado e os seus próprios custos de produção (Pindyck e Rubinfeld, 2010). Para tal, o monopolista precisa encontrar a quantidade produzida que faz com que suas receitas marginais se igualem aos custos marginais, conforme ilustrado graficamente na figura 3.5.

**Figura 3.5** – Quantidade ótima de um monopolista.



Fonte: adaptado de Pindyck e Rubinfeld, 2010.

Na figura 3.5, a curva de demanda  $D(q)$ , que é a própria curva de receita média do monopolista, identifica o preço unitário a ser recebido pela empresa em função do seu nível de produção. São também apresentadas as correspondentes curvas do custo marginal,  $CMg$ , e da receita marginal,  $RMg$ . A intersecção dessas duas curvas determina a quantidade ótima, ou seja, o equilíbrio do monopolista. Determinada a

quantidade ótima, é encontrado o preço ótimo que deverá ser adotado pelo monopolista, sempre superior ao custo marginal. A quantidade  $q_e$  e o preço  $p_e$  maximizarão o lucro do produtor.

Graficamente, o lucro do produtor é a área do retângulo em destaque com altura ( $p_e - CMe$ ) e largura  $q_e$ , sendo  $CMe$  o custo médio de produção da empresa. Algebricamente podemos expressar o objetivo de maximização do excedente do produtor pela equação que segue:

$$\text{Max } z = q_e D(q_e) - \int_0^{q_e} S(q) dq \quad (3.15)$$

Onde  $S(q)$  é a curva inversa de oferta do produtor, ou seja, o custo marginal de produção.

### 3.5.4. Equilíbrio no Oligopólio

O oligopólio se caracteriza por um mercado no qual apenas algumas empresas competem entre si e barreiras à entrada tornam difícil ou impossível que novas empresas entrem na competição. (Pindyck e Rubinfeld, 2010). A administração de uma empresa inserida no contexto oligopolista é complexa. As decisões com relação a preço, produção, investimentos e propaganda, por exemplo, envolvem considerações estratégicas a respeito de seus competidores. As empresas frequentemente tomam decisões por razões estratégicas. O que distingue decisões estratégicas de outros tipos de decisões é que tais ações são tomadas em um contexto no qual as empresas devem levar em consideração a reação de outros jogadores e o seu potencial impacto, positivo ou negativo.

“A antecipação da resposta de um competidor é um elemento essencial na elaboração de uma estratégia competitiva” (Smit e Trigeorgis, 2004).

Durante o processo de tomada de decisão, cada empresa deve considerar as reações dos concorrentes, ciente do fato de que as empresas impactadas também considerarão as reações de seus concorrentes em relação às suas decisões. Um dos primeiros estudos sobre competição oligopolista foi desenvolvido por Augustin Cournot (Cournot, 1838, apud Nagurney, 1999). No modelo de competição de Cournot as empresas decidem o seu nível de produção ou de sua capacidade. A demanda do consumidor no mercado determina o

preço. Cournot desenvolveu o modelo para explicar como as empresas em uma estrutura de duopólio, ou seja, um oligopólio com duas empresas no mercado, decidem sobre suas capacidades de forma a maximizar seus lucros.

### Equilíbrio de Cournot-Nash

Para exemplificar o modelo de Cournot, base fundamental para a modelagem do problema desta pesquisa a ser apresentado no próximo capítulo, considere a competição de duas empresas,  $a$  e  $b$ , que ainda não iniciaram a sua operação e estão prestes a comercializar um produto de tecnologia emergente (exemplo adaptado de Smit & Trigeorgis, 2004). Supõe-se que as duas empresas *hightech* entrarão no mercado simultaneamente. Em função de custos marginais serem baixos, é rentável produzir o produto com uma alta taxa de utilização da capacidade. Desta forma, com que capacidades as empresas deveriam iniciar suas respectivas operações? A decisão estratégica para cada empresa é a capacidade,  $q_i$ , que é oferecida ao mercado, sendo  $i \in \{a, b\}$ . O preço é uma consequência da curva de demanda e da oferta do produto. O preço de mercado suficiente para comercializar toda a oferta dos produtores é  $p$ . Assim sendo, supõe-se que a curva da função inversa de demanda é dada pela equação:

$$p = A - (q_a + q_b)$$

Onde  $A$  é o intercepto da curva.

A escolha estratégica de cada empresa é, portanto, a decisão de sua capacidade. Se uma das empresas aumenta sua produção, isto implicaria na redução do preço de equilíbrio de mercado e afetaria também o lucro do competidor. Supõe-se, também, que o intercepto da curva inversa da demanda, representado pelo parâmetro  $A$  é 17,5, o custo variável unitário,  $c$ , de ambas as empresas é \$5 e o custo variável total é dado por:  $C(q_i) = cq_i$ . Os custos variáveis totais estão crescendo com o nível de produção  $q_i$ . Quanto deveria ser o nível de produção de cada uma das empresas? O valor bruto do projeto,  $V_i$ , e o valor presente líquido,  $VPL_i$ , da empresa  $i$  pode ser determinado pelo valor presente do fluxo de caixa do projeto. A capacidade de cada

empresa para produzir o produto de tecnologia emergente dependerá do nível de produção que maximizará o seu valor presente líquido. O lucro de cada empresa depende de sua produção e da produção de seu competidor e é dado por:

$$z_i(q_a, q_b) = pq_i - C(q_i) = [17,5 - (q_a + q_b)]q_i - 5q_i$$

Cada empresa age como se fosse um monopolista diante de uma função inversa da demanda em que a produção de seu competidor é considerada dada, conforme segue:  $p = (17,5 - q_j) - q_i$ .

O quadro 3.1 mostra os lucros da empresa *a* (Quadro A) e os lucros da empresa *b* (Quadro B), respectivamente, como uma função da produção da empresa e de seu competidor. A primeira linha do Quadro A representa os níveis possíveis de produção da empresa *a*. A primeira coluna do Quadro A, representa os níveis possíveis de produção da empresa *b*. A intersecção de uma coluna com uma linha do Quadro A representa o lucro da empresa *a* para aqueles níveis de produção.

Raciocínio equivalente assume-se para o Quadro B, que apresenta os lucros da empresa *b*, para dados níveis de produção das empresas *a* e *b*. Portanto, para cada nível de produção do competidor *j*, a empresa *i*  $\in \{a, b\}$  determina qual deverá ser o seu nível de produção de modo a maximizar seu lucro.

Por exemplo, dado que a empresa *a* produz duas unidades, a empresa *b* deverá produzir 5 unidades para maximizar seu lucro, correspondente à produção que maximiza o seu lucro, e este raciocínio se repete para todas as possíveis escolhas de produção que o competidor vier a fazer.

**Quadro 3.1 - Lucros da empresa *a* e empresa *b* sob competição Cournot.**

**Quadro A – Lucros da empresa *a***

**Níveis de Produção – Empresa *a***

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0	11,5	21,0	28,5	34,0	37,5	39,0	38,5	36,0	31,5
1	0,0	10,5	19,0	25,5	30,0	32,5	33,0	31,5	28,0	22,5
2	0,0	9,5	17,0	22,5	26,0	27,5	27,0	24,5	20,0	13,5
3	0,0	8,5	15,0	19,5	22,0	22,5	21,0	17,5	12,0	4,5
4	0,0	7,5	13,0	16,5	18,0	17,5	15,0	10,5	4,0	-4,5
5	0,0	6,5	11,0	13,5	14,0	12,5	9,0	3,5	-4,0	-13,5
6	0,0	5,5	9,0	10,5	10,0	7,5	3,0	-3,5	-12,0	-22,5
7	0,0	4,5	7,0	7,5	6,0	2,5	-3,0	-10,5	-20,0	-31,5
8	0,0	3,5	5,0	4,5	2,0	-2,5	-9,0	-17,5	-28,0	-40,5
9	0,0	2,5	3,0	1,5	-2,0	-7,5	-15,0	-24,5	-36,0	-49,5

**Quadro B – Lucros da empresa *b***

**Níveis de Produção – Empresa *a***

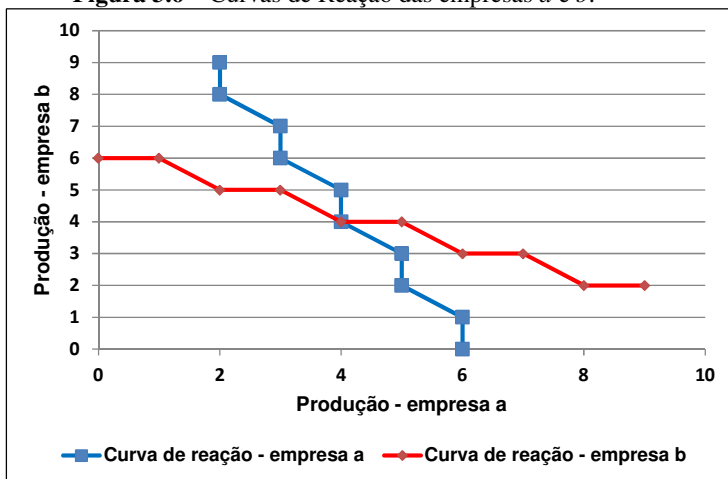
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	11,5	10,5	9,5	8,5	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5
2	21,0	19,0	17,0	15,0	13,0	11,0	9,0	7,0	5,0	3,0
3	28,5	25,5	22,5	19,5	16,5	13,5	10,5	7,5	4,5	1,5
4	34,0	30,0	26,0	22,0	18,0	14,0	10,0	6,0	2,0	-2,0
5	37,5	32,5	27,5	22,5	17,5	12,5	7,5	2,5	-2,5	-7,5
6	39,0	33,0	27,0	21,0	15,0	9,0	3,0	-3,0	-9,0	-15,0
7	38,5	31,5	24,5	17,5	10,5	3,5	-3,5	-10,5	-17,5	-24,5
8	36,0	28,0	20,0	12,0	4,0	-4,0	-12,0	-20,0	-28,0	-36,0
9	31,5	22,5	13,5	4,5	-4,5	-13,5	-22,5	-31,5	-40,5	-49,5

Fonte: adaptado de Smit e Trigeorgis, 2004.

Assim sendo, a curva de reação apresenta a quantidade ótima a ser produzida por uma empresa para cada nível de produção de seu competidor. A figura 3.6 ilustra as curvas de reação das empresas *a* e *b*.

Observa-se que em uma competição por capacidade as curvas de reação têm inclinação negativa. Caso uma empresa reduza a sua quantidade produzida, a outra empresa aumentará a sua produção de modo a maximizar seu lucro.

**Figura 3.6** – Curvas de Reação das empresas a e b.



Fonte: Smith e Trigeorgis (2004).

Sob informação perfeita, cada empresa conhece a curva de reação do seu concorrente e sabe que o concorrente também conhece a sua própria curva de reação. Portanto, uma empresa escolherá um nível de produção que maximiza seu lucro dado o nível de produção escolhido pelo seu competidor, resultando em um equilíbrio na intersecção das duas curvas. No exemplo ilustrado pela figura 3.6, ambas as empresas produzirão quatro unidades. O preço de mercado será \$9,5 de modo que cada empresa lucrará \$18. Este equilíbrio constitui um equilíbrio de Cournot, também chamado de equilíbrio de Cournot-Nash.

Nash generalizou o conceito de Cournot para o caso de  $n$  jogadores, cada um agindo em favor do seu próprio interesse, o que chamou de jogo não cooperativo (Smit e Trigeorgis, 2004). Em outras palavras, Nash afirmou que uma empresa estará fazendo o melhor que pode em função do que os seus oponentes estejam fazendo. Por outro lado, os concorrentes farão o melhor que podem em função do que a própria empresa esteja fazendo. Pode-se ilustrar no exemplo da tabela 3.1 porque Nash chama tais interações entre empresas de jogos não cooperativos. A produção total de oito unidades resultante do equilíbrio não é a produção ótima sob o ponto de vista do lucro máximo da indústria. Pressões competitivas impedem que as empresas maximizem os seus lucros de forma conjunta e as duas empresas abrem mão de parte de seus lucros que poderiam ganhar tivessem elas agido como monopolistas. Se as empresas cooperassem teriam estabelecido cada

uma um nível de produção de três unidades, implicando em um lucro de \$19,5, portanto \$1,5 a mais que no equilíbrio de Cournot-Nash. Entretanto, sob a pressão da competição, com ambas as empresas produzindo três unidades, cada uma delas terá um incentivo de produzir cinco unidades. Estando uma das empresas produzindo cinco unidades, a outra terá o incentivo de produzir quatro unidades e assim por diante, até que cada uma delas esteja produzindo quatro unidades, atingindo o equilíbrio.

A função de lucro de uma empresa em um ambiente oligopolista pode ser generalizada para um mercado com mais de dois produtores, conforme segue. Sejam  $m$  produtores envolvidos na produção de uma commodity homogênea. A quantidade produzida pela empresa  $i$  é dada por  $x_i$ , com as quantidades produzidas representadas por um vetor coluna  $x \in R^m$ . Seja  $S_i$ , o custo de produção de uma unidade pela empresa  $i$ , e  $D$  é a função inversa da demanda associado ao produto. Assume-se que:

$$S_i = S_i(x_i) \quad (3.16)$$

e onde,

$$D = D\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) \quad (3.17)$$

Ou seja, o custo de produção da empresa  $i$  é uma função que depende da quantidade  $x_i$  e a função inversa da demanda ou preço, é uma função que depende da quantidade total produzida no mercado.

O lucro da empresa  $i$ ,  $z_i$ , pode ser expresso como:

$$z_i(x) = D\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)x_i - S_i(x_i) \quad (3.18)$$

A seguir os problemas de equilíbrio na competição perfeita, monopólio e oligopólio serão reformulados como problemas matemáticos de equilíbrios espaciais e apresentados, em sua forma equivalente, como *Problemas de Inequações Variacionais* (VIP). A teoria de inequação variacional é uma formulação geral que incorpora uma gama de problemas matemáticos, tais como, equações não lineares, problemas de otimização, de complementaridade e de ponto fixo.

Recentemente a teoria tem sido utilizada para resolver problemas de equilíbrio econômico. A formulação de inequações variacionais é

particularmente conveniente neste trabalho porque permite um tratamento unificado para problemas de equilíbrio, permitindo sintetizar um espectro de mercados que contempla desde problemas de equilíbrio espacial de preços até problemas de equilíbrio para mercados imperfeitamente competitivos, tais como o oligopólio e o seu caso particular de monopólio. Ou seja, permite considerar exogenamente no modelo proposto nesta tese diferentes estruturas de mercado, ou seja monopólio, competição perfeita e oligopólio.

O apêndice B apresenta a definição formal de um Problema de Inequação Variacional bem como, os relacionamentos entre a formulação dos problemas matemáticos já bem conhecidos na literatura, normalmente utilizados para a obtenção de equilíbrio, e o problema de inequações variacionais, fundamentando teoricamente as formulações de inequações variacionais apresentadas a seguir para as diferentes estruturas de mercados.

### **3.5.5. Mercados espaciais**

O conceito de rede foi inicialmente utilizado por Cournot (1838, apud Nagurney, 1999), que considerou dois mercados espacialmente distribuídos, com custos de transportes entre eles. Pigou (1920, apud Nagurney 1999) estendeu o conceito de equilíbrio para um sistema de transporte, no qual a rede consistia de duas rotas independentes. Neste trabalho o autor concluiu que a solução ótima para a operação do sistema diferia da solução de equilíbrio apresentada pelos usuários da rede. Enke (1951) estabeleceu a conexão entre os problemas de equilíbrio espacial de preços e as redes de circuitos eletrônicos e, por analogia, demonstrou que se podem calcular os preços e os fluxos associados a uma commodity. Porém, desde o artigo célebre de Samuelson (1952) seguido dos trabalhos de Takayama e Judge (1964), é que o conceito de mercado espacial de preços tem sido o foco nos estudos de mercados que envolvem a competição entre empresas e o transporte de produtos a consumidores separados geograficamente. O modelo de equilíbrio espacial de preços, para mercados competitivos, basicamente contempla as funções de oferta e de demanda para cada região e uma rede de movimento de produtos cujos arcos são funções de custos de transporte, de um ponto de produção para um ponto de consumo, possivelmente não lineares. O objetivo é obter um vetor de preços nos mercados consumidores e um padrão de quantidades transportadas em que: (a) o total produzido iguale-se ao total consumido; (b) são economicamente racionais (Harker, 1986).



A seguir os modelos apresentados nas seções anteriores para concorrência perfeita, monopólio e oligopólio serão generalizados de forma a se considerar mercados espaciais.

### **Mercado espacial em concorrência perfeita:**

Os modelos de equilíbrio espacial de preços apresentam a característica fundamental de reconhecer a importância do espaço e dos custos logísticos associados ao transporte de uma commodity entre um mercado de produção e um mercado de consumo. Estes modelos são de equilíbrio perfeitamente competitivo, onde se assume que existam muitos produtores e consumidores envolvidos na produção e no consumo, respectivamente, de uma ou mais commodities.

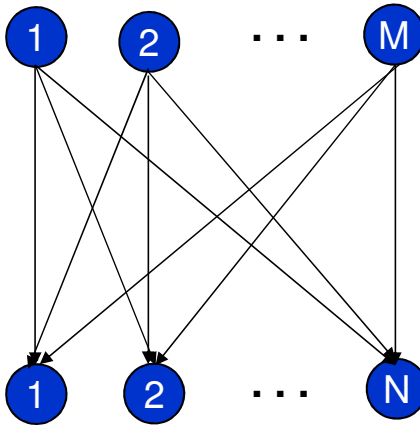
Considere a generalização do modelo da seção 3.5.2 de um mercado local, para um mercado distribuído espacialmente, perfeitamente competitivo, no qual existem muitos produtores individuais, cada qual com uma pequena capacidade de produção, decidindo de modo independente uns dos outros. Neste modelo são conhecidas as funções inversas do preço de produção e do preço de demanda, ou seja, são dadas as quantidades de oferta e de demanda dos mercados. Considere  $M$  mercados produtores e  $N$  mercados consumidores envolvidos na produção e no consumo de um produto, respectivamente. O mercado produtor é denotado por  $i$  e o mercado consumidor é denotado por  $j$ . Assim sendo as variáveis do modelo são descritas a seguir:

- $q_i$             quantidade produzida pelo mercado produtor  $i$ .
- $d_j$             quantidade total consumida pelo mercado consumidor  $j$ .
- $x_{ij}$            quantidade transportada do mercado produtor  $i$  para o  
mercado consumidor  $j$ .
- $C_{ij}(x_{ij})$    custo marginal de transporte do mercado  $i$  para o mercado  $j$ .
- $S_i(q_i)$       função inversa da curva de oferta do mercado produtor  $i$ .
- $S_i^{\max}$         capacidade do produtor  $i$ .
- $D_j(d_j)$       função inversa da curva de demanda do mercado consumidor  
 $j$ .

Na notação acima, considera-se que o custo de transporte depende do fluxo transportado entre os referidos pares de mercados. No caso particular em que o mercado de transporte caracteriza-se por competição perfeita, esta função reduz-se a um valor constante  $C_{ij}$ .

Assume-se que a comercialização é realizada de acordo com a cláusula CIF<sup>14</sup> e que os custos de transação embutem os custos de transporte, impostos, tarifas alfandegárias, taxas e/ou eventuais subsídios. A figura 3.7 ilustra a distribuição espacial entre os mercados.

**Figura 3.7** – Distribuição espacial de mercados.



Fonte: elaborado pelo autor.

Como o objetivo é maximizar o excedente da sociedade, para mercados espacialmente distribuídos, o problema de concorrência perfeita pode ser resolvido através da seguinte formulação (Nagurney, 2009):

$$\max z = \sum_{j=1}^N \int_0^{d_j} D_j(w) dw - \sum_{i=1}^M \int_0^{q_i} S_i(w) dw - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \int_0^{x_{ij}} C_{ij}(w) dw \quad (3.19)$$

---

<sup>14</sup> Nos contratos de operações mercantis de compra e venda, a cláusula CIF indica que as despesas com seguro e frete estão incluídas no preço da mercadoria vendida e, portanto, tais despesas são de responsabilidade do vendedor.

$$\text{s.a.: } \sum_{i=1}^M x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = q_i \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (3.21)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (3.22)$$

$$0 \leq q_i \leq q_i^{\max} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.23)$$

As restrições (3.20) e (3.21) caracterizam o princípio de conservação de fluxo, ou seja, garantem que: (a) as quantidades totais produzidas sejam totalmente comercializadas; (b) a produção em cada mercado produtor seja igual à soma das quantidades transportadas para os mercados consumidores; e (c) a quantidade consumida em cada mercado consumidor é igual soma das quantidades enviadas de cada um dos mercados produtores.

O conjunto convexo fechado que caracteriza as soluções viáveis do problema (3.19)-(3.23) pode ser denotado por  $\Omega$ .

Onde,

$$\Omega \equiv \{(q, x, d) \mid \text{satisfaz (3.20) a (3.23)}\},$$

e  $q$ ,  $x$  e  $d$  são os vetores associados às quantidades produzidas nos mercados produtores  $i$ , fluxo de mercadorias entre o par de mercados  $i$  e  $j$  e as quantidades consumidas em  $j$ , respectivamente.

Considerando o contexto e a formulação do problema (3.19)-(3.23), a condição de equilíbrio de mercado é definida como sendo a situação em que para cada par de mercados produtores e consumidores  $((i, j): i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N)$ :

$$\text{Se } S_i(q_i) + C_{ij} = D_j(d_j), \text{ então } x_{ij} \geq 0 \quad (3.24)$$

$$\text{Se } S_i(q_i) + C_{ij} > D_j(d_j), \text{ então } x_{ij} = 0$$

Em outras palavras, o equilíbrio espacial é obtido se o preço no mercado produtor somado ao custo de transporte é igual ao preço no mercado consumidor, nos casos em que existem transferências de commodity; caso contrário, isto é, se o preço no mercado produtor somado ao custo de transporte exceder ao preço do mercado, então não haverá transferência entre o par de mercados.

A seguir, apresenta-se a formulação do problema de inequações variacionais das condições de equilíbrio em (3.24). As relações de equivalência existentes entre o problema de inequações variacionais e o problema de otimização são apresentadas no apêndice B.

**Teorema 3.2<sup>15</sup>** – Formulação do problema de inequação variacional baseada em quantidade para o problema de equilíbrio espacial de preços.

O vetor  $x^* = (x_{11}^*, \dots, x_{ij}^*, \dots, x_{MN}^*)$  é uma solução para o problema de equilíbrio em mercados perfeitamente concorrenciais se satisfaz o seguinte problema de inequações variacionais:

$$\langle -\nabla z(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad (3.25)$$

Onde:

$$\nabla z(x^*)^T = \left[ \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_{ij}}, \dots, \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_{MN}} \right] \quad (3.26)$$

Considerando a função objetivo do problema de competição perfeita dada pela equação (3.19) e derivando esta expressão em relação às variáveis de fluxo, conforme equação (3.26) se obtém a seguinte equação que equivale a um dos componentes do vetor linha representado pela equação (3.26):

$$\frac{\partial z(x^*)}{\partial x_{ij}} = D_j(d_j) - S_i(q_i) - C_{ij} \quad (3.27)$$

---

<sup>15</sup> A prova do teorema 3.2 é apresentada em Nagurney (1999, página 95).

Desta forma, a formulação final do problema de inequação variacional considerando as equações (3.25)-(3.27), para competição perfeita, é apresentada a seguir:

$$\left\langle \begin{bmatrix} -D_1(d_1) + S_1(q_1) + C_{11} \\ \vdots \\ -D_j(d_j) + S_i(q_i) + C_{ij} \\ \vdots \\ -D_N(d_N) + S_M(q_M) + C_{MN} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{MN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11}^* \\ \vdots \\ x_{ij}^* \\ \vdots \\ x_{MN}^* \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j \quad (3.28)$$

A equação (3.28) é um produto escalar comumente representado na forma  $\langle x, y \rangle$ .

### **Mercado espacial no Monopólio:**

Considere a generalização do modelo de equilíbrio de um monopólio, apresentado na seção 3.5.3 para um mercado distribuído espacialmente, no qual se assume em cada região um único produtor. Assume-se neste trabalho que a empresa produtora contrata o serviço de transporte pelo preço econômico. Este preço pode ser igualado ao custo marginal de transporte em um mercado de transporte puramente competitivo. Considerando as mesmas variáveis e notações apresentadas no problema de concorrência perfeita da seção anterior, tem-se:

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^N d_j D_j(d_j) - \sum_{i=1}^M \int_0^{q_i} S_i(w) dw - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ij} x_{ij} \quad (3.29)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^N x_{ij} = q_i \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (3.30)$$

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = d_j \quad (3.31)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (3.32)$$

$$0 \leq q_i \leq q_i^{\max} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.33)$$

Por analogia ao problema de competição perfeita, têm-se o teorema a seguir para o caso de monopólio.

**Teorema 3.3<sup>16</sup>** – Formulação do problema de inequação variacional para o problema de equilíbrio espacial no monopólio.

O vetor  $x^* = (x_{11}^*, \dots, x_{ij}^*, \dots, x_{MN}^*)$  é uma solução para o problema de equilíbrio monopolista se satisfaz o seguinte problema de inequações variacionais:

$$\langle -\nabla z(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x_{ij} \geq 0 \quad (3.34)$$

Onde:

$$\nabla z(x^*)^T = \left[ \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_{11}}, \dots, \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_{ij}}, \dots, \frac{\partial z(x^*)}{\partial x_{MN}} \right] \quad (3.35)$$

Considerando que a função objetivo do monopólio é:

$$z = \sum_{j=1}^N d_j D_j(d_j) - \sum_{i=0}^M \int_0^{q_i} S_i(w) dw - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ij} x_{ij} \quad (3.36)$$

E derivando a expressão (3.36) em relação às variáveis de fluxo, tem-se:

$$\frac{\partial z(x^*)}{\partial x_{ij}} = D_j(d_j) + d_j \frac{dD_j(d_j)}{dd_j} - S_i(q_i) - C_{ij} \quad (3.37)$$

Desta forma, a formulação final do problema de inequação variacional para o monopólio é dada pela equação a seguir:

---

<sup>16</sup> A prova deste teorema é apresentada em Nagurney (1999).

$$\left\langle \begin{bmatrix} -D_1(d_1) - d_j \frac{dD_1(d_1)}{dd_1} + S_1(q_1) + C_{11} \\ -D_j(d_j) - d_j \frac{dD_j(d_j)}{dd_j} + S_i(q_i) + C_{ij} \\ -D_N(d_N) - d_N \frac{dD_N(d_N)}{dd_N} + S_M(q_M) + C_{MN} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{ij} \\ x_{MN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11}^* \\ x_{ij}^* \\ x_{MN}^* \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall_{i,j} \tag{3.38}$$

### **Mercado Espacial no Oligopólio:**

Entre os dois extremos discutidos anteriormente, se situa o mercado espacial no oligopólio que consiste de algumas poucas empresas que atuam em um mercado espacialmente distribuído.

Considere a generalização do modelo de mercado local, apresentado na seção 3.5.4. Assume-se que existem  $m$  empresas e  $n$  mercados que são separados espacialmente. Assume-se, ainda, que o produto é homogêneo e produzido pelas  $m$  empresas e consumido nos  $n$  mercados. Seja  $x_i$  a quantidade produzida pela empresa  $i$  e  $d_j$  a demanda do produto no mercado  $j$ . Seja, ainda,  $x_{ij}$  o fluxo não negativo entre a região de produção  $i$  para a região de consumo  $j$ . Os vetores coluna  $x_i \in R_+^m$ ,  $d_j \in R_+^n$  e  $x_{ij} \in R_+^{mn}$ , contêm as quantidades de produção, demandas e o fluxo do produto, respectivamente.

Cada produtor que participa do oligopólio possui um objetivo de maximização do lucro próprio, dado pela seguinte expressão:

$$z_i(x) = \sum_{j=1}^N x_{ij} D_j(d_j) - \int_0^{q_i} S_i(w) dw - \sum_{j=1}^N C_{ij} x_{ij} \tag{3.39}$$

As equações de conservação de fluxo devem ser satisfeitas:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = q_i, \quad \forall i \quad (3.40)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad \forall j \quad (3.41)$$

$$0 \leq q_i \leq q_i^{\max} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.42)$$

$$\text{Onde, } x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \quad (3.43)$$

Associado a cada empresa tem-se o custo de produção  $S_i$  e associado a cada mercado consumidor tem-se a curva inversa da demanda  $D_j$ . Assumindo-se que  $x_{ij} D_j(d_j)$  é uma função estritamente côncava,  $D_j(d_j)$  é estritamente decrescente,  $S_i(q_i)$  é estritamente convexa e o vetor  $x_i$  é não vazio para pelo menos um produtor  $i$ , então o problema (3.39)-(3.43) tem uma solução única para valores fixos de  $C_{ij}$  e  $X_{ij}$ , para  $\forall i, j, i \neq j$ .

Para achar o equilíbrio espacial, o problema (3.39)-(3.43) deve ser resolvido simultaneamente para todas as empresas. É demonstrado que isso pode ser feito, resolvendo uma única inequação variacional, conforme será apresentado a seguir.

Considere  $m$  jogadores, com cada jogador  $i$  dispondo de um vetor de estratégias  $x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\}$ , selecionado de um conjunto convexo fechado (compacto)  $\Omega_i \subset R^n$ , com uma função utilidade  $u_i: \Omega \mapsto R^1$ , onde  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_m \subset R^{mn}$ . O postulado da racionalidade pressupõe que cada jogador  $i$  seleciona um vetor de estratégia  $x_i \in \Omega_i$  que maximiza a utilidade  $u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)$ , dada as decisões  $(x_j), j \neq i$ , dos outros jogadores. Portanto, pode-se reescrever a definição 3.1 do equilíbrio de Nash, apresentado na seção 3.3.4, da seguinte forma:



### Definição 3.2 – Equilíbrio de Nash

Um equilíbrio de Nash é um vetor de estratégias  $x^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\} \in \Omega$ , tal que  $u_i(x_i^*, \hat{x}_i^*) \geq u_i(x_i, \hat{x}_i^*)$ ,  $\forall x_i \in \Omega_i$ ,  $\forall i$  onde  $\hat{x}_i^* = (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_m^*)$ .

O equilíbrio de Nash é um problema de inequação variacional, conforme demonstrado por Stampacchia (1996, apud Nagurney, 1999) e Gabay e Moulin (1980, apud Nagurney, 1999). Assim sendo, sobre a premissa de que cada função de utilidade  $u_i$  é continuamente diferenciável em  $\Omega$  e côncava com respeito a  $x_i$ , tem-se o teorema a seguir.

**Teorema 3.4**<sup>17</sup> – Formulação do VIP para o equilíbrio de Nash espacial:

Sob as premissas anteriores,  $x^*$  é um equilíbrio de Nash se e somente se  $x^* \in \Omega$  é uma solução do seguinte problema de inequações variacionais:

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \quad (3.44)$$

Onde  $F(x) \equiv (-\nabla_{x_1} u_1(x), \dots, -\nabla_{x_m} u_m(x))$  é um vetor linha, e onde,

$$\nabla_{x_i} u_i(x) = \left[ \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_{i1}}, \dots, \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_{in}} \right] \quad (3.45)$$

Usando este teorema apresenta-se o VIP do equilíbrio de Cournot-Nash para o Oligopólio, conforme segue.

Cada produtor que participa do oligopólio possui um objetivo de maximização do lucro próprio, dado pela seguinte expressão:

---

<sup>17</sup> A prova do teorema 3.4 é apresentada em Nagurney (1999).

$$z_i(x) = \sum_{j=1}^N x_{ij} D_j(d_j) - \int_0^{q_i} S_i(w) dw - \sum_{j=1}^N C_{ij} x_{ij} \quad (3.46)$$

Derivando esta expressão em relação às variáveis de fluxo da estratégia do  $i$ -ésimo jogador, tem-se

$$\frac{\partial z_i(x)}{\partial x_{ij}} = D_j(d_j) + x_{ij} \frac{dD_j(d_j)}{dd_j} - S_i(q_i) - C_{ij} \quad (3.47)$$

Como existem várias funções objetivo, uma para cada par de mercados de produção e de consumo, tem-se a seguinte estrutura para a formulação do problema de inequação variacional:

$$\left\langle \begin{bmatrix} -D_1(d_1) - x_{i1} \frac{dD_1(d_1)}{dd_1} + S_1(q_1) + C_{11} \\ -D_j(d_j) - x_{ij} \frac{dD_j(d_j)}{dd_j} + S_i(q_i) + C_{ij} \\ -D_N(d_N) - x_{iN} \frac{dD_N(d_N)}{dd_N} + S_M(q_M) + C_{MN} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{ij} \\ x_{MN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11}^* \\ x_{ij}^* \\ x_{MN}^* \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall_{i,j} \quad (3.48)$$

Da mesma forma que nas formulações anteriores para competição perfeita e monopólio, o problema (3.48) pode ser resolvido pelo algoritmo de projeção apresentado na seção seguinte.

Na seção 4.4.2 será formulado o modelo de equilíbrio de curto prazo para o problema apresentado nesta tese e uma interpretação gráfica de dedução da equação (3.47), análoga às equações (3.27) e (3.37), será apresentada.

### 3.5.6. Algoritmo para obtenção do equilíbrio espacial

Nesta seção será apresentado um roteiro interativo para a solução do problema de inequação variacional. Tal roteiro resulta de uma recente teoria chamada de Sistemas Dinâmicos Projetados (PDS)<sup>18</sup> para o estudo de problemas de equilíbrio em uma configuração dinâmica. Diz-se que  $x^*$  é um ponto estacionário ou um ponto de equilíbrio se, uma vez o sistema dinâmico projetado estando em  $x^*$ , este permanecerá em  $x^*$  em todos os tempos seguintes. Os algoritmos de solução de problemas de inequação variacional baseados na teoria PDS podem ser interpretados como aproximações para tempo discreto de modelos de tempo contínuo.

Busca-se determinar  $x^* \in \Omega \subset R^n$ , tal que,

$$\langle F(x^*)^T, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \quad (3.49)$$

Onde  $F$  é uma dada função contínua de  $\Omega$  em  $R^n$  e  $\Omega$  é um dado conjunto fechado e convexo que corresponde às restrições do problema em particular. Assume-se também que o conjunto  $\Omega$  é compacto e  $F(x)$  continuamente diferenciável em  $x$ .

#### **Roteiro Interativo para solução do VIP – Algoritmo de Projecção:**

##### **Passo 1: Inicialização**

Inicie com um  $x^0 \in \Omega$ . Faça  $k = 0$ .

##### **Passo 2: Construção e Cálculo**

Calcule  $x^k$  resolvendo o subproblema de inequação variacional:

$$x^{k+1} = P_{\Omega} \left( x^k - \alpha_k F(x^k) \right) \quad (3.50)$$

---

<sup>18</sup> Nesta teoria estende-se o conceito de equilíbrio estático ao se introduzir a dimensão de tempo de forma a permitir a análise de comportamentos de desequilíbrio que precede ao equilíbrio. Para um maior detalhamento de Sistemas Dinâmicos Projetados referir-se à Nagurney (1999, páginas 38 a 41).

Onde  $x^{k+1}$  é conhecido como sendo a projeção ortogonal em  $\Omega$  do vetor  $x^k - \alpha_k F(x^k)$  para qualquer  $\alpha_k > 0$ , e onde  $\{\alpha_k, k = 1, 2, \dots\}$  é uma sequência de escalares positivos e  $F(x^k)$  é um campo vetorial definido em  $\Omega$  (para um maior detalhamento ver seção A.2.6 do apêndice B).

### **Passo 3: Verificação de Convergência**

Se  $\|x^{k+1} - x^k\| > \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é uma margem de tolerância pré-especificada, faça  $k \leftarrow k + 1$  e volte ao passo P2.

**Passo 4:** Apresentar  $x^{k+1}$ .

A solução para o problema (3.49) passa, portanto, por resolver uma sequência de subproblemas (3.50), onde  $x^{k+1}$  é uma projeção ortogonal de  $x^k - \alpha_k F(x^k)$  no conjunto  $\Omega$ . Uma discussão mais detalhada do método encontra-se apresentada em Branco et al. (2009). A interpretação geométrica do Método de Projeção Ortogonal é apresentada no apêndice B, seção B.6.

As condições de convergência e o teorema que demonstra a convergência deste método de solução são apresentados na seção B.7 do Apêndice B deste trabalho.

## 4. MODELO PROPOSTO

### 4.1. INTRODUÇÃO

No capítulo 2 fez-se uma revisão detalhada da literatura de modelos de expansão de capacidade, incluindo correntes teóricas limítrofes a este assunto e diferentes tipos de abordagens ao problema. No capítulo 3, foi apresentado o ferramental teórico necessário para fundamentar o modelo a ser proposto. Neste capítulo, será proposta uma nova abordagem para a modelagem do problema de expansão de capacidade.

O segmento da indústria a ser analisado contempla a produção e a comercialização de um produto homogêneo, de amplo consumo, que pode ser produzido e comercializado por um grande número de empresas, ou seja, uma mercadoria básica, comumente chamada pelo termo inglês de *commodity*. O produto é comercializado com frete CIF.

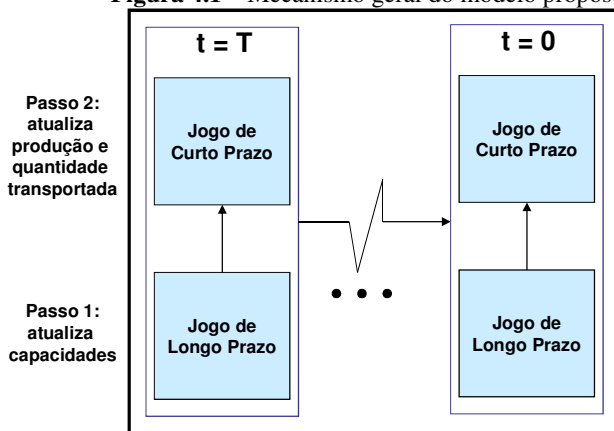
O modelo é composto por dois passos distintos executados a cada período, caracterizado por intervalos de um ano.

No primeiro passo, as empresas enfrentam um jogo de longo prazo onde competem por capacidade de produção, escolhendo o tamanho da expansão a cada período de forma a ajustar sua função de custo e capacidade de produção.

No segundo passo, definidas e fixadas as capacidades, as empresas competem em um jogo de curto prazo, por nível de produção e quantidades transportadas. Considera-se neste estágio que o equilíbrio ocorre em um período tão curto em relação ao horizonte de planejamento que as capacidades não variam.

A figura 4.1 ilustra o mecanismo do modelo. No passo 1, forças opostas atuam simultaneamente no processo de tomada de decisão: se por um lado o decisor tende a postergar a expansão de capacidade devido às características de irreversibilidade e incerteza deste tipo de investimento, por outro lado, as empresas reconhecem a vantagem de investir antes que os seus competidores o façam. Como consequência, o ganho de flexibilidade, gerado pela possibilidade de postergar investimentos irreversíveis sob incerteza, deve ser confrontado com o ganho de se investir mais cedo e potencialmente ocupar o mercado do competidor e/ou evitar novos entrantes.

**Figura 4.1** – Mecanismo geral do modelo proposto.



Fonte: elaborado pelo autor.

As decisões de investimento dependem do estado atual, que é caracterizado pela capacidade das empresas no período presente e da sequência que as empresas investem que, no modelo em questão, é assumido ser um processo de Markov, conforme detalhado posteriormente neste capítulo. O equilíbrio resultante do jogo de longo prazo é um Equilíbrio Perfeito de Markov (EPM) entre as empresas que competem entre si.

No passo 2, as empresas enfrentam um jogo de curto prazo, no qual as capacidades  $K$  das empresas são fixadas. Assim, a competição volta-se para o nível de produção e quantidades transportadas. No modelo proposto, os resultados do jogo de curto prazo são baseados no equilíbrio Cournot-Nash.

Estes dois passos do modelo são interdependentes dado que, por um lado, o lucro anual  $\pi$ , de cada empresa, que resulta do mercado spot de curto prazo, depende fundamentalmente dos investimentos realizados, ou seja, da capacidade instalada, por outro lado, as decisões de investimentos não podem ser tomadas sem que seja determinado o lucro anual a cada período. Logo, existe um acoplamento entre os dois jogos, no qual está embebido na equação recursiva de programação dinâmica adotada no modelo proposto, no qual os lucros anuais são *inputs* para as decisões de investimentos. Cabe ressaltar, porém, que os dois jogos não necessitam ser resolvidos sequencialmente a cada período como esquematizado na figura 4.1.

Alternativamente, do ponto de vista do algoritmo, este acoplamento poderia ser substituído por uma abordagem de resolução de dois módulos separadamente: (1) no primeiro módulo, os lucros anuais seriam obtidos pela solução do jogo de curto prazo, para todas as capacidades viáveis de cada empresa produtora e em cada período; (2) a seguir, no segundo módulo, as decisões ótimas de investimento seriam obtidas pela solução do jogo de longo prazo, tendo como input os lucros anuais, gerados no primeiro módulo do algoritmo. Esta abordagem é adotada Bushnell & Ishii (2007). Assume-se que as empresas descontam seus fluxos de caixa utilizando um fator fixo.

O arcabouço teórico do modelo proposto pode ser considerado como diretamente relacionado com o ramo da literatura que combina opções reais e a teoria dos jogos, também conhecida como jogos de opção (ver seção 2.1.6). Em outras palavras, a utilidade esperada, comumente utilizada na teoria dos jogos, pode ser substituída pelo valor de opções reais. Assim, o método dos ativos contingentes (ver seção 2.1.5) é usado para calcular o valor das opções e com a utilização de probabilidades neutras ao risco para calcular o valor da opção a cada ramo de uma árvore binomial, com o equilíbrio sendo alcançado por indução reversa, iniciando com o retorno do nó final da árvore. Entretanto, no modelo proposto nesta tese, assume-se que o processo estocástico não é necessariamente correlacionado por um ativo comercializado no mercado financeiro.

Tal como em Murto et al. (2004), a função de distribuição de probabilidade da variável estocástica corresponde a probabilidades reais de transição e o fator fixo de desconto é ajustado para atender as preferências de risco das empresas. O modelo proposto, portanto, no que se refere ao jogo de longo prazo, generaliza o modelo de Murto et al. (2004), apresentado na seção 2.2.3, determinando a expansão ótima de capacidade em um horizonte de planejamento finito, assumindo uma estrutura espacial de mercado para a competição de curto prazo (mercado spot).

A seguir descreve-se o modelo proposto de expansão de capacidade. O equilíbrio para o jogo de curto prazo entre as empresas será formulado como um problema de inequações variacionais. Para obtenção da estratégia ótima de investimentos ao longo do horizonte de planejamento será formulado um problema de Programação Dinâmica, tendo como dados de entrada, a cada período de tempo, os lucros auferidos no equilíbrio de curto prazo. Conclui-se este capítulo apresentando o algoritmo de solução do modelo.

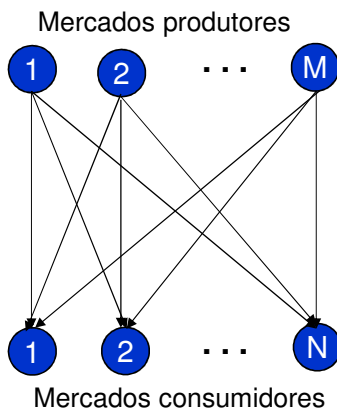
## 4.2. CARACTERIZAÇÃO DO AMBIENTE

O objetivo do modelo é determinar uma política ótima de expansão de capacidade de uma empresa produtora de uma mercadoria homogênea competindo com outros produtores pela demanda dos mercados em um horizonte de tempo finito. Tais produtores podem estar localizados em diferentes regiões e transportam seu produto para os mercados consumidores, também distribuídos espacialmente. A princípio, nenhum produtor é monopolista do sistema de transporte, nem o controla, mas contrata o referido serviço pelo preço econômico. Cada mercado consumidor tem a sua própria função da curva demanda, a qual é conhecida por todos os produtores.

Considere múltiplos mercados produtores  $I = \{1, 2, \dots, M\}$  e consumidores  $J = \{1, 2, \dots, N\}$ . Cada mercado produtor é formado por um ou mais produtores individuais atendendo um ou mais mercados consumidores, todos distribuídos espacialmente. Uma rede ilustrativa desta configuração pode ser representada pela figura 4.2.

Assume-se que as empresas se comportam de forma não cooperativa em um mercado oligopolístico com severas barreiras para novos entrantes.

**Figura 4.2** – Estrutura de rede do problema de equilíbrio espacial



Fonte: elaborado pelo autor.

A notação utilizada nesta seção e em todo o capítulo 4 é sumarizada conforme segue:



$$I = \{1, 2, \dots, M\}$$

Conjunto de mercados produtores (empresas);

$$J = \{1, 2, \dots, N\}$$

Conjunto de mercados consumidores;

$$\Gamma = \{T, T-1, \dots, t, \dots, 0\}$$

Conjunto de períodos (estágios).  
Quando o sistema está no estágio  $t$  restará  $t$  estágios para o fim do horizonte de planejamento.

$$K_i = \{0, 1, 2, \dots, k_i^{\max}\}$$

Conjunto de possíveis capacidades instaladas associadas à empresa  $i$ , onde  $k_{\max}$  é a expansão máxima permitida de forma a limitar as opções de investimentos a um conjunto finito.

$$K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_M$$

Produto cartesiano de todas as possíveis capacidades das empresas;

$$\mathbf{k}_t = (k_{t,1}, k_{t,2}, \dots, k_{t,M}) \in K$$

Vetor de capacidades instaladas das empresas no estágio  $t \in \Gamma$ , onde  $k_{t,i}$  é a capacidade instalada da empresa  $i$  no estágio  $t \in \Gamma$ ;

$$\mathbf{\kappa}_i = (\kappa_{T,i}, \kappa_{T-1,i}, \dots, \kappa_{1,i})$$

Vetor contendo as expansões de capacidade realizadas pela empresa  $i$  ao longo do horizonte de planejamento, onde  $\kappa_{t,i}$  é o tamanho do investimento em capacidade realizado pela empresa  $i$  no estágio  $t \in \Gamma$ ;

$$\varphi(\kappa_{t,i}) = a\kappa_{t,i}^\alpha$$

Valor do investimento da empresa  $i$  no estágio  $t \in \Gamma$ , como função do tamanho da expansão  $\kappa_{t,i}$ , onde

$0 < \alpha < 1$  é uma constante de economia de escala;

$\mathbf{x}_t = (x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_M) \in \Omega_t$  Vetor contendo as estratégias de transporte para as diversas empresas no período  $t$ , onde  $x'_i = (x'_{i,1}, x'_{i,2}, \dots, x'_{i,N}) \in \Omega_{t,i}$ , é o vetor de estratégias de transporte da empresa  $i$  para os mercados consumidores  $j = 1, 2, \dots, N$ , no tempo  $t$ ; sendo que  $\Omega_{t,i}$  é o espaço convexo e fechado contendo todas as decisões viáveis de produção da empresa  $i$  no tempo  $t$  (ver seção 3.5.5).

$\pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t)$

Lucro da empresa  $i$  obtido no jogo de curto prazo, que depende das capacidades  $\mathbf{k}_t$  presentes no estágio  $t \in \Gamma$  e o vetor de fluxo do produto  $\mathbf{x}_t$  obtido no jogo de curto prazo. O cálculo de  $\pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t)$  será detalhado na seção 4.4.

O número de períodos  $t \in \Gamma$  deve ser grande o suficiente de forma que o efeito do fim do período de planejamento não afete as decisões nos períodos iniciais. Na seção 4.3 serão tecidos comentários a respeito do valor residual de um horizonte de planejamento finito. Se a empresa decide investir em expansão de capacidade em um período  $t$ , incorrerá em um custo irreversível  $\varphi_{t,i}(\kappa_{t,i})$ , onde  $\kappa_{t,i}$  é o tamanho da expansão da empresa  $i$  no período  $t$ .

Define-se  $\mathbf{k}_t$  como sendo o vetor de variável de estado que descreve a capacidade da empresa  $i \in I$ , no tempo  $t$ . Sob a decisão de um produtor  $r \in I$  para expandir  $\kappa_{t,r}$  unidades de capacidade no estágio

$t \in \Gamma$ , o sistema evolui de  $\mathbf{k}_t = (k_{t,1}, k_{t,2}, \dots, k_{t,M}) \in K$  para  $\mathbf{k}_{t-1} = (k_{t-1,1}, k_{t-1,2}, \dots, k_{t-1,M}) \in K$  de acordo com a seguinte regra de transição:

$$\begin{cases} k_{t-1,r} = k_{t,r} + \kappa_{t,r} \\ k_{t-1,i} = k_{t,i} \end{cases} \quad \forall i \neq r \quad (4.1)$$

Cada empresa é capaz de observar a capacidade de todos os competidores no começo de cada período. Logo, a equação (4.1) descreve como as capacidades das empresas evoluem de acordo com suas estratégias. Para simplificar, considere a notação  $\mathbf{k}_{t-1} = \mathbf{k}_t \oplus \kappa_{t,r}$  como a maneira de representar a transição descrita em (4.1).

A função de retorno associada à expansão da empresa  $i$  de  $\kappa_{t,i}$  unidades, no estágio  $t \in \Gamma$ , é dada por:

$$\rho_i(t, \mathbf{k}_t, \kappa_{t,i}) = -\varphi(\kappa_{t,i}) + \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t) \quad (4.2)$$

Considerando que cada produtor decide maximizar o valor descontado de seu próprio fluxo de caixa ao longo do horizonte de planejamento, para um dado vetor de capacidades iniciais  $\mathbf{k}_T$ , o seguinte problema a ser resolvido pela empresa  $i \in I$  pode ser definido como:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \quad \sum_{t=1}^T \delta^{T-t} \rho_i(t, \mathbf{k}_t, \kappa_{t,i}) \\ &\text{sujeito a:} \quad \mathbf{k}_{t-1} = \mathbf{k}_t \oplus \sum_r \kappa_{t,r} \quad \forall t = T, T-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Onde  $\delta^t$ , é o fator de desconto no estágio  $t$ . Assume-se que  $\delta^t$  é uma constante ao longo do tempo de forma que adotamos a notação  $\delta$ .

Neste contexto, investimentos realizados em um momento atual, em geral duradouros, afetam não somente os lucros atuais, mas também os lucros no futuro. Em outras palavras, se a empresa expande

fortemente hoje, é menos provável que ela expanda de forma acentuada em um próximo período. Este processo de decisão intertemporal, portanto, pode ser incorporado no modelo através da programação dinâmica, formulando um problema de maximização conforme o princípio de otimalidade de Bellman<sup>19</sup>, como segue:

$$\begin{aligned}
 Z_i^*(t, \mathbf{k}_t) &= \max_{\forall \kappa_{t,i}} Z_i(t, \mathbf{k}_t \mid \kappa_{t,i}) \\
 Z_i^*(t, \mathbf{k}_t) &= \max_{\forall \kappa_{t,i}} \left\{ \left[ -\varphi(\kappa_{t,i}) + \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}') \right] + \delta Z_i^*(t-1, \mathbf{k}_t \oplus \kappa_{t,i}) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Onde  $Z_i^*(t, \mathbf{k}_t)$  representa o impacto futuro dos investimentos, incluindo os investimentos atuais, e  $Z_i^*(t-1, \mathbf{k}_t \oplus \kappa_{t,i})$  é chamado valor de continuação.

Entretanto, deve-se considerar que mercados de *commodities* podem também não serem perfeitamente competitivos. Empresas tendem a agir de forma estratégica quando suas decisões afetam não somente seus lucros, mas também afetam o lucro de seus competidores. Este comportamento estratégico pode ser incorporado no modelo considerando-se que cada empresa escolhe seus investimentos e níveis de produção para maximizar a equação recursiva (4.4), dadas as decisões de todos os seus competidores. Este jogo das empresas, cada qual decidindo sobre estratégias que maximizem seus próprios lucros, conduz a um equilíbrio de Nash. A seguir, define-se formalmente o conceito de equilíbrio de Nash para obter tais estratégias sob equilíbrio.

---

<sup>19</sup> O princípio de otimalidade de Bellman declara que “uma política ótima apresenta a propriedade segundo a qual, a despeito das decisões tomadas para se atingir um estado particular num certo estágio, as decisões restantes a partir deste estado devem constituir uma política ótima” (Bellman, 1957).

### 4.3. EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO

#### Definição 4.1.

Equilíbrio de Nash é um plano ótimo descrito por  $(\kappa_1^*, \kappa_2^*, \dots, \kappa_M^*)$ , onde o componente  $\kappa_i^*$  é um vetor com o plano ótimo da empresa  $i$  para cada período do horizonte de planejamento,  $T, \dots, t, t-1, \dots, 1$ , de forma que, a cada estágio  $t$ :

$$Z_i^*(t, \mathbf{k}_t) = Z_i(t, \mathbf{k}_t \mid \kappa_{t,i}^*, \kappa_{-i}^*) \geq Z_i(t, \mathbf{k}_t \mid \kappa_{t,i}, \kappa_{-i}^*) \quad \forall \kappa_{t,i} \quad (4.5)$$

Onde  $\kappa_{-i}^* = (\kappa_1^*, \kappa_2^*, \dots, \kappa_{i-1}^*, \kappa_{i+1}^*, \dots, \kappa_M^*)$  é o conjunto de vetores contendo o plano ótimo para todas as empresas, exceto para a empresa  $i$ .

Portanto, a equação (4.5) afirma o seguinte: o retorno ótimo do produtor  $i$  no período  $t$ , dada a capacidade total do mercado  $\mathbf{k}_t$ , é alcançada quando o retorno resultante da decisão de expansão  $\kappa_{t,i}^*$ , dadas as decisões de capacidades de todos os outros produtores,  $\kappa_{-i}^*$ , é sempre maior do que o retorno resultante da decisão de qualquer outra expansão,  $\kappa_{t,i}$ , mantidas as decisões de expansão de todos os outros produtores,  $\kappa_{-i}^*$ .

Um processo de refinamento das estratégias de equilíbrio Nash para eliminar estratégias não críveis é chamado de equilíbrio perfeito em subjogo. É conhecido que todo o equilíbrio perfeito em subjogo é um equilíbrio de Nash (Fudenberg & Tirole, 1991).

Conforme definição 3.1, um equilíbrio de Nash é um equilíbrio perfeito em subjogo se as estratégias dos jogadores constituem um equilíbrio de Nash em todo subjogo.

Fudenberg and Tirole (1991) mostram que todo o jogo finito de informação perfeita<sup>20</sup> tem um equilíbrio de Nash perfeito em subjogo

---

<sup>20</sup> Finito neste contexto significa que o número de estágios é finito e o número de ações viáveis é um conjunto convexo compacto e, portanto finito. Dado que se assume que cada jogador conhece as escolhas passadas de todos os seus competidores, isto implica que um determinado jogador ao tomar uma decisão em um estágio  $t$ , está perfeitamente informado de todos os aspectos do jogo, exceto sobre o que ocorrerá no futuro (Fudenberg & Tirole, 1991, pag. 72).

cuja solução de equilíbrio  $(\kappa_1^*, \kappa_2^*, \dots, \kappa_M^*)$ , em um período  $t$ , pode ser obtida pelo princípio da retro-indução ou indução reversa (conhecido pelo termo em inglês de *backward induction*). Este princípio é muito conhecido em programação dinâmica, onde se analisa a árvore de jogos de trás para frente, ou seja, estabelecem-se primeiro as estratégias ótimas nos nós terminais e depois vai se estabelecendo as estratégias ótimas nos nós anteriores, até se chegar ao primeiro nó de decisão da árvore.

Entretanto, como solução do problema, podem existir múltiplos conjuntos de investimentos, os quais são também soluções de equilíbrio de Nash, já que empresas decidem simultaneamente, conjecturando sobre as possíveis decisões de outros competidores. A condição de um jogo finito não é suficiente para garantir a unicidade da solução.

Esta condição pode ser ilustrada por um exemplo no contexto de investimentos em expansão de capacidade, apresentado a seguir.

Considere um jogo entre duas empresas, A e B, ou seja, um duopólio. O mercado no momento observado comporta apenas um investimento de uma das empresas. Logo, se ambas as empresas investirem, o excesso de capacidade resultante implicará em prejuízo para as duas empresas. No caso de empresas tomarem suas decisões simultaneamente, existirão duas possíveis soluções: (1) a empresa A investe e a empresa B não investe; (2) a empresa A não investe e a empresa B investe. A figura 4.3 ilustra a forma estratégica deste jogo. Os retornos das empresas A e B, para cada combinação das duas decisões são dados pelos pares de números  $(x, y)$  em cada quadrante.

As opções que combinam decisões de uma empresa investir e outra não investir são soluções de equilíbrio de Nash, dado que ambas têm a propriedade de que nenhuma das empresas teria unilateralmente o desejo de mudar sua estratégia tendo em vista a decisão tomada da outra empresa.

**Figura 4.3** - Exemplo de solução não única para o equilíbrio de Nash.

		Empresa A	
		Investir	Não Investir
Empresa B	Não Investir	<div>Solução de Equilíbrio de Nash</div> <div>(0,2)</div>	(0,2)
	Investir	(-3,-1)	<div>(2,1)</div> <div>Solução de Equilíbrio de Nash</div>

Fonte: adaptado de Smit e Trigeorgis (2004).

No exemplo da figura 4.3 não há nenhum critério que permita decidir por uma única solução entre as duas soluções de equilíbrio. Um critério a ser adotado, seria assumir que as empresas tomam decisões sequencialmente, cada qual em um período de tempo. Tais jogos são chamados de jogos sequenciais, ou jogos de informação perfeita, conforme apresentado na seção 3.3. Neste jogo, cada empresa, em cada estágio, tem todas as informações necessárias para tomar uma decisão ótima.

Desta forma, de acordo com o teorema 3.1, um jogo sequencial finito, com informação perfeita, tem um único equilíbrio perfeito de Nash em subjogo envolvendo estratégias puras. A solução de equilíbrio, neste caso, pode ser obtida através de programação dinâmica “reversa” (Fudenberg & Tirole, 1991).

Bushnell e Ishii (2007) alegam que a condição imposta ao modelo de movimentação das empresas em sequência tem apelo natural quando se trata, por exemplo, de mercados de energia. Empresas que já operam no mercado investem antes do que empresas entrantes e empresas maiores se movem também antes que empresas menores. Neste contexto, portanto, justifica-se adotar tal condição ao modelo.

Portanto, a unicidade da solução de equilíbrio do modelo apresentado neste capítulo será garantida assumindo-se que as empresas

decidirão de forma sequencial. Logo, em cada período, somente uma das empresas que participam do jogo pode decidir aumentar sua capacidade.

Para atender a esta condição, será adicionada ao modelo uma variável aleatória discreta  $\theta$ , que representa a oportunidade da empresa  $i$  investir no tempo  $t$ .

Por definição (Albuquerque, 2008), uma variável aleatória  $\theta$  é uma função de conjunto que atribui um valor real  $\theta(w)$  a cada ponto-amostra  $w$  do espaço de amostras  $\Lambda$ . Em outras palavras,  $\theta$  define o mapa

$$\begin{aligned}\theta: \quad \Lambda &\mapsto \mathbb{R} \\ w &\mapsto \theta(w)\end{aligned}$$

No caso em questão, o domínio  $\Lambda$  é o conjunto de empresas do mercado e o contradomínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  que identifica a empresa, ou seja,  $\theta(w) = w = i$ , sendo  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

Portanto, a distribuição de probabilidade da variável  $\theta$  em cada período  $t$  pode ser definida como um conjunto de probabilidades  $\{p_{t,1}, p_{t,2}, \dots, p_{t,M}\}$ . Onde  $P(\theta = i) = P(\{w \in \Lambda : \theta(w) = i\}) = p_{t,i}$  é a probabilidade da empresa  $i$  investir no período  $t$ , independentemente de qual empresa investiu no período anterior.

A soma das probabilidades  $p_{t,1}, p_{t,2}, \dots, p_{t,M}$  é igual a 1 em cada período  $t$ . Portanto, pode-se reescrever a equação recursiva (4.4) conforme segue:

$$E[Z_i^*(t, \mathbf{k}_t)] = \sum_{r=1}^M p_{t,r} E[Z_i(t, \mathbf{k}_t \mid \kappa_{t,r}^*, \kappa_{t-r}^*)] \quad (4.6)$$

Onde,

$$\begin{aligned}E[Z_i(t, \mathbf{k}_t \mid \kappa_{t,r}^*, \kappa_{t-r}^*)] = & \left\{ \begin{array}{ll} \underset{\kappa_{t,i}}{Max} \quad -\varphi_{t,i}(\kappa_{t,i}) + \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t) + \delta E[Z_i(t-1, \mathbf{k}_{t-1})] & \text{para } i = r \\ \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t) + \delta E[Z_i(t-1, \mathbf{k}_{t-1})] & \text{para } i \neq r \end{array} \right\}\end{aligned}$$



Onde,  $E[Z_i(t-1, \mathbf{k}_{t-1})]$  é o valor esperado da empresa  $i$  no estágio  $t-1$ , dada a variável aleatória  $\theta$  que governa o sequenciamento dos investimentos, considerando-se que quando  $i = r$  indica que a empresa  $i$  está investindo no momento  $t$ .

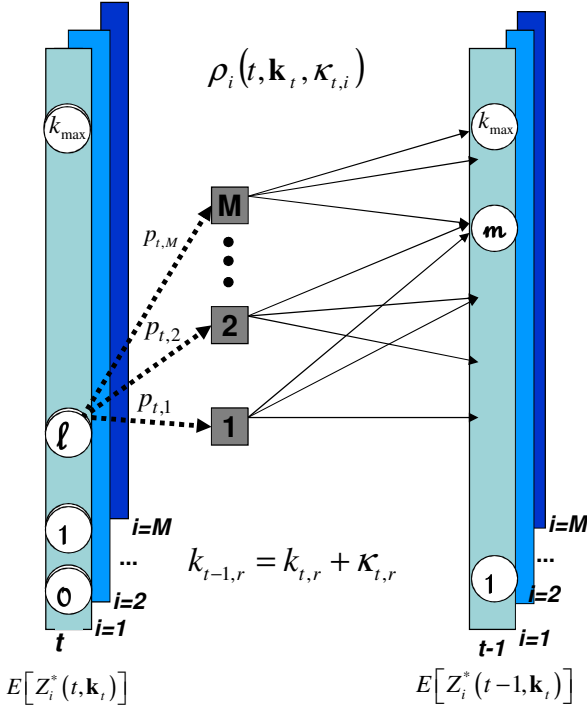
Portanto, conforme ilustrado na figura 4.4, existe uma probabilidade  $p_{t,i}$  da empresa  $i$  ser escolhida para realizar um investimento no período  $t$ . Ao tomar tal decisão neste momento, a empresa  $i$  ignora as ações de outros competidores, e move-se de um estado  $\mathbf{k}_t$  para outro estado  $\mathbf{k}_{t-1}$  de acordo com o tamanho de seu investimento  $\kappa_{t,i}$ , obtendo, então, um retorno  $\rho_i(t, \mathbf{k}_t, \kappa_{t,i})$ , no qual maximiza a equação (4.7).

Ao incorporar esta distribuição de probabilidade ao modelo, se está diante de um jogo estocástico sequencial onde as decisões estratégicas de investimentos são Markovianas. O perfil de estratégias as quais constituem um equilíbrio de Nash em todo subjogo é chamado um Equilíbrio Perfeito de Markov (EPM). Dado que somente uma empresa toma decisão a cada período, existe um e somente um EPM (ver Fudenberg & Tirole, 1991, cap. 13).

Considerando ainda que o critério utilizado para a escolha da estratégia ótima é o valor presente de um fluxo de caixa descontado por um fator constante ao longo do tempo, as decisões relativas a um período distante no futuro tendem a ter um impacto desprezível nas decisões do momento atual.

Em outras palavras, se o horizonte de planejamento é longo o suficiente, é aceitável afirmar que a decisão ótima no começo de um horizonte de planejamento finito é consistente com a decisão ótima de um problema com um horizonte de planejamento infinito (Bean & Smith, 1985).

**Figura 4.4** – Evolução de estado com estratégias Markovianas.



Fonte: elaborado pelo autor.

Pode-se ainda acrescentar que, quanto maior for o fator mensal de desconto (que pode ser medida pela taxa mínima de atratividade) em relação ao crescimento da receita (ou do fluxo de caixa), mais desprezível será o impacto de decisões relativas ao final do horizonte de planejamento.

A formulação de modelos com um horizonte de planejamento finito,  $T \neq \infty$ , requer a incorporação de uma função de valor residual,  $R_i(\mathbf{k}_0)$ , a qual define o valor do projeto da empresa  $i$  ao fim do horizonte de planejamento. Entende-se como valor residual o valor presente no período  $T$ , o último período de análise, deste fluxo de caixa perpétuo.

O valor residual pode ser melhor entendido através da equação (4.8), a qual define a sequência de lucros ao longo do tempo sob um caminho ótimo de investimento da empresa  $i$ , conforme segue:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \rho_i^*(t, \mathbf{k}_t, \kappa_{t,i}) = \sum_{t=1}^T \delta^{T-t} \rho_i^*(t, \mathbf{k}_t, \kappa_{t,i}) + \delta^T R_i(\mathbf{k}_0) \quad (4.8)$$

O primeiro termo após o sinal de igualdade,  $\sum_{t=1}^T \delta^{T-t} \rho_i^*(t, \mathbf{k}_t, \kappa_{t,i})$ , define o valor presente do fluxo de caixa do período 1 ao período  $T$ . O segundo termo após o sinal de igualdade,  $\delta^T R_i(\mathbf{k}_0)$ , representa o valor presente do fluxo de caixa de um período que inicia no período  $T$  e termina no infinito. Embora o modelo permita que se utilizem muitos tipos de função residual, escolheu-se o método de perpetuidade constante<sup>21</sup>, o qual estende o fluxo de caixa ao infinito sem considerar crescimento da empresa (Damadoran, 2004). Considerando-se uma taxa de desconto  $\gamma$  e um fator de desconto  $\delta$ , onde  $\delta = 1/(1 + \gamma)$ , o valor residual em termos do fator de desconto é calculado como segue:

$$R_i(\mathbf{k}_0) = \frac{1}{1 - \delta} \pi_{0,i}^*(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}^0) \quad (4.9)$$

Onde  $R_i(\mathbf{k}_0)$ , é o fluxo de caixa operacional descontado ao fim do horizonte de planejamento. O retorno  $\pi_{0,i}^*(\mathbf{k}_0, \mathbf{x}^0)$  é definido como o Fluxo de Caixa para o Acionista (FCO), ou seja, o fluxo de caixa operacional descontado do fluxo do financiamento de capital de terceiro. Logo a taxa de desconto deve ser o custo do capital próprio (CCP). A equação (4.9) é consistente com a visão de que a melhor estimativa de um fluxo de caixa de uma empresa no futuro distante é o fluxo de caixa associado com o último estágio de um longo período de planejamento. Como o valor residual é descontado por  $\delta$ , quanto maior o horizonte de

---

<sup>21</sup> Há dois tipos de perpetuidade: com e sem crescimento (constante). No método de perpetuidade constante os projetos não criam valor para o acionista, pois os lucros retidos são reaplicados à mesma taxa de desconto do fluxo.

planejamento, menor o impacto da função do valor residual nas decisões de investimentos do momento presente.

Na seguinte seção, será formulado um modelo de equilíbrio para obter os lucros de comercialização de cada empresa, em cada período  $t$ , denotado por  $\pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t)$ , o qual é um dado de entrada para a equação (4.7). Estes lucros são resultados do equilíbrio das empresas competindo pela quantidade a ser produzida, e transportada para cada mercado consumidor, o qual é chamado jogo de equilíbrio de curto prazo, que será apresentado na seção seguinte.

#### 4.4. EQUILÍBRIO DE CURTO PRAZO

Na seção anterior foi formulado o equilíbrio de longo prazo, caracterizado por uma empresa competindo com as demais empresas concorrentes para melhorar a sua capacidade relativa no mercado e identificando sua estratégia ótima de investimentos.

Uma vez conhecidas e fixadas as suas capacidades ótimas, as empresas se voltam para um jogo de curto prazo no início do próximo período de forma a obter os níveis ótimos de produção que maximizem os seus lucros e garantam participação de mercado, buscando evitar, porém, uma queda significativa no preço do produto.

A formulação do modelo de equilíbrio de curto prazo depende da estrutura competitiva do mercado, tais como, competição perfeita, oligopólio ou monopólio. Logo, uma formulação que considera exogenamente a estrutura competitiva do mercado é necessária. Portanto, é conveniente que se utilize a metodologia de inequações variacionais, apresentada na seção 3.5, para formular um modelo de equilíbrio unificado de mercados espaciais que atenda ao mesmo tempo todas as estruturas competitivas mencionadas. Uma das características distintivas desta formulação é justamente a generalização do algoritmo de forma a atender a múltiplos mercados distribuídos espacialmente.

Conforme visto na seção 4.3, pode-se afirmar que as receitas obtidas no equilíbrio de curto prazo são os dados de entrada que formam a base para se calcular as variáveis de decisão do modelo de longo prazo, ou sejam, o momento de investir e o porte da expansão de capacidade. Para a obtenção destas receitas, serão considerados os modelos de equilíbrio de competição perfeita, de monopólio e o de competição de Cournot-Nash cujas abordagens teóricas foram apresentadas na seção 3.5.

#### 4.4.1. Premissas Básicas do Modelo de Curto Prazo

O modelo de equilíbrio de curto prazo é baseado nos seguintes pressupostos:

- a) As empresas produzem uma mercadoria homogênea, ou seja, não há diferenças suficientemente significativas entre os produtos oferecidos pelas empresas para, por exemplo, se ter diferentes curvas de demandas.
- b) O preço da commodity nos diferentes mercados é uma função inversa da demanda, a qual tem um padrão de crescimento linear e estacionário relativo aos períodos do horizonte de planejamento. Entende-se como um padrão estacionário da demanda como o fato de não haver mudanças qualitativas no comportamento da função de demanda ao longo do tempo.
- c) Os custos e as capacidades são fixos no período de comercialização dos produtos, ou seja, o equilíbrio ocorre em um período de tempo suficientemente pequeno para que não haja variações de custos e nem de capacidade.
- d) O custo de produção é infinito para um nível de produção maior que a capacidade da empresa.

A rede de produtores e consumidores pode ser representada pela figura 4.2, onde são considerados os mercados produtores ( $i=1,...,M$ ) e consumidores ( $j=1,...,N$ ). Para um dado estado  $\mathbf{k}_t = (k_{t,1}, k_{t,2}, ..., k_{t,i}, ..., k_{t,M}) \in K$ , no estágio  $t$ , uma empresa  $i$  produzindo  $q_i^t$ , com capacidade de produção  $k_{t,i}$ , deve decidir transportar uma quantidade  $x_{ij}^t$  para cada mercado consumidor  $j$ . Neste contexto, define-se um conjunto convexo fechado  $\Omega_{t,i}$  de decisões viáveis através das seguintes restrições:

$$q_i^t = \sum_{j=1}^N x_{ij}^t \quad (4.10)$$

$$0 \leq q_i^t \leq k_{t,i} \quad (4.11)$$

$$x_{ij}^t \geq 0, \quad \forall j \quad (4.12)$$

A função de custo marginal de produção  $S_i(q_i^t, k_{t,i})$ , de uma forma geral, depende da quantidade produzida e da capacidade de produção atual da empresa. Sem perda de generalidade assume-se que esta função é linear e dada pela equação (4.13), conforme segue.

$$S_i(q_i^t, k_{t,i}) = A_i' + B_i' q_i^t \quad (4.13)$$

Onde,  $A_i'$  é o intercepto e  $B_i'$  é a inclinação da curva inversa de oferta do produtor  $i$ . Por outro lado, a função inversa da demanda  $D_j(d_j)$ , é dada por:

$$D_j(d_j^t) = A_j + B_{t,j} d_j^t \quad (4.14)$$

Onde  $d_j^t = \sum_{i=1}^M x_{ij}^t$ , é a quantidade transportada total para o mercado consumidor  $j$  no tempo  $t$ ,  $A_j$  é o intercepto e  $B_{t,j}$  é a inclinação da curva inversa da demanda do mercado consumidor  $j$  no tempo  $t$ . O custo unitário de transporte do mercado produtor  $i$  para o mercado consumidor  $j$  é dado por  $C_{ij}(x_{ij}^t)$ .

Entende-se como necessário, neste momento, detalhar o mecanismo de crescimento da demanda adotada no modelo proposto nesta tese, conforme apresentado a seguir.

O crescimento da demanda será caracterizado pelo aumento do parâmetro de inclinação da curva inversa da demanda,  $B_{t,j}$ , a cada período  $t$ , ou seja,

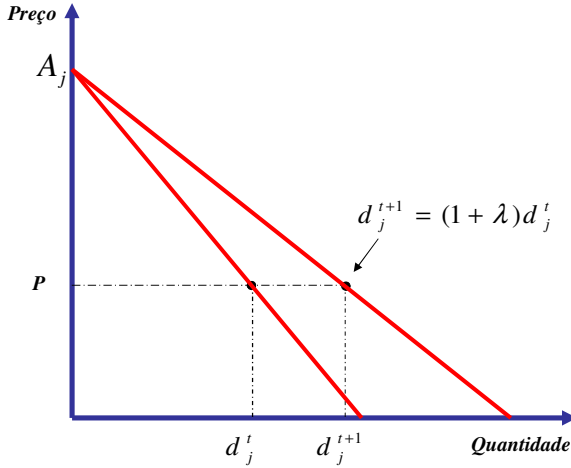
$$B_{t+1,j} = B_{t,j} / (1 + \lambda) \quad (4.15)$$

Onde  $\lambda$  é a taxa de crescimento da demanda. Considerando que  $d_j^t$  é a quantidade demandada no tempo  $t$ , a partir de (4.14) tem-se a seguinte demanda no tempo  $t+1$ :

$$d_j^{t+1} = ((1 + \lambda) / B_{t,j})(A_j - D_j) = (1 + \lambda)d_j^t \quad (4.16)$$

A figura 4.5 ilustra o modelo de crescimento da demanda adotado no modelo.

**Figura 4.5** – Mecanismo de crescimento da demanda.



Fonte: adaptado de Garcia e Shen (2010).

Nota-se que a elasticidade preço da demanda não varia com o tempo, ou seja,

$$\varepsilon_{t+1} = -\frac{(\partial d_j^{t+1} / \partial D_j)}{(d_j^{t+1} / D_j)} = \frac{-(1 + \lambda)(\partial d_j^t / \partial D_j)}{(1 + \lambda)d_j^t / D_j} \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_{t+1} = -\frac{\partial d_j^t / \partial D_j}{d_j^t / D_j} = \varepsilon_t \quad (4.18)$$

Alguns modelos disponíveis na literatura utilizam esta premissa para que a variável de decisão se restrinja apenas ao momento ótimo de decisão e não também ao volume escolhido de produção (Murto et al., 2004). Dadas as premissas que o custo marginal é próximo de zero e que a elasticidade é alta o suficiente, ou seja,  $\varepsilon > 1$ , a receita marginal será positiva para todas as empresas, independentemente dos seus níveis de

produção. Neste caso o volume produzido será sempre a capacidade máxima de produção da empresa (esta condição será melhor explorada na seção 5.2.2). No modelo proposto nesta tese, entretanto, a referida premissa é adotada apenas por se tratar de uma característica real de mercado que garante que o preço seja sempre positivo, seja qual for a demanda.

#### 4.4.2. Formulação do Modelo

##### • Oligopólio:

Considere as mesmas premissas e ambiente de mercado apresentadas na seção 4.2, com  $M$  jogadores (empresas). Cada jogador  $i$  dispõe de um conjunto de decisões  $x_i^t = (x_{i,1}^t, x_{i,2}^t, \dots, x_{i,N}^t) \in \Omega_{t,i}$  que representam as quantidades a serem transportadas no período  $t$ . Deve-se notar que  $x_i^t$  deve satisfazer as equações (4.10)-(4.12) para todos os jogadores. Assumindo-se que os jogadores são racionais, quer-se determinar um vetor de decisões  $x^{t*} = (x_1^{t*}, x_2^{t*}, \dots, x_i^{t*}, \dots, x_M^{t*})$  que maximize a função utilidade do jogo de curto prazo  $\pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, x_i^{t*}, x_{-i}^{t*})$  no estágio  $t$  para todos os jogadores, onde  $x_{-i}^{t*} = (x_1^{t*}, \dots, x_{i-1}^{t*}, x_{i+1}^{t*}, \dots, x_M^{t*})$ , é o plano ótimo para todas as empresas, exceto para a empresa  $i$ .

O vetor ótimo de decisões será obtido através de um equilíbrio Cournot-Nash que satisfaz a seguinte condição:

$$\pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, x_i^{t*}, x_{-i}^{t*}) \geq \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, x_i^t, x_{-i}^{t*}) \quad \forall x_i^t \in \Omega_{t,i}, \quad \forall i \quad (4.19)$$

Como apresentado em Nagurney (1999, páginas 212 e 224), sob tais premissas citadas,  $x^{t*}$  é um equilíbrio de Nash se e somente se  $x^{t*} \in \Omega_t = \Omega_{t,1} \times \Omega_{t,2} \times \dots \times \Omega_{t,M}$  é uma solução da inequação variacional:

$$\left\langle F(x^{t*}), x^t - x^{t*} \right\rangle \geq 0, \quad \forall x^t \in \Omega_t \quad (4.20)$$



Onde  $F(x^t) \equiv \left( -\nabla_{x'_1} \pi_{t,1}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t), \dots, -\nabla_{x'_M} \pi_{t,M}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t) \right)$ , é um vetor linha e onde,

$$\nabla_{x'_1} \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t) = \left[ \frac{\partial \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t)}{\partial x'_{11}}, \dots, \frac{\partial \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t)}{\partial x'_{1N}} \right] \quad (4.21)$$

O modelo de oligopólio distribuído espacialmente é uma extensão do modelo clássico de oligopólio (Nagurney, 2009).

No modelo desta tese, o lucro da empresa oligopolista  $i$ ,  $\pi_{t,i}$  é obtido considerando as equações (4.13)-(4.14) e os custos unitários de transporte  $C_{ij}(x^t_{ij})$ , conforme segue:

$$\begin{aligned} \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t) = & \sum_{j=1}^N x^t_{ij} \left( A_j + B_j d^t_j \right) - \int_0^{q^t_i} (A'_i + B'_i \varpi) d\varpi - \\ & - \sum_{j=1}^N C_{ij}(x^t_{ij}) x^t_{ij} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Assim sendo, de forma a obter  $F(x^*)$ , da equação (4.20), deriva-se a equação (4.22) em relação ao fluxo do produto  $x_{ij}$  de acordo com a equação (4.21), conforme segue:

$$\frac{\partial \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t)}{\partial x^t_{ij}} = \left( A_j + B_j d^t_j \right) + x^t_{ij} \frac{d(A_j + B_j d^t_j)}{dd^t_j} - \left( A'_i + B'_i q^t_i \right) - C_{ij}(x^t_{ij}) \quad (4.23)$$

ou,

$$\frac{\partial \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t)}{\partial x^t_{ij}} = \left( A_j + B_j d^t_j \right) + x^t_{ij} B_j - \left( A'_i + B'_i q_i \right) - C_{ij}(x^t_{ij}) \quad (4.24)$$

Utilizando a equação (4.24) na equação (4.21), o problema de inequação variacional pode ser reescrito conforme denotado pela

equação (4.20). Ou seja, deve-se determinar o vetor  $x^{t*} = (x_{11}^{t*}, \dots, x_{ij}^{t*}, \dots, x_{MN}^{t*}) \in \Omega_t$ , tal que:

$$\left\langle \begin{bmatrix} -(A_{11} + B_{1,1} d_1^t) - x_{11}^t B_1 + (A'_1 + B'_1 \cdot d_1^t) + C_{11} \\ \vdots \\ -(A_{ij} + B_{i,j} d_j^t) - x_{ij}^t B_j + (A'_i + B'_i \cdot d_j^t) + C_{ij} \\ \vdots \\ \underbrace{-(A_N + B_{N,N} d_N^t)}_{1^{tem}} - \underbrace{x_{MN}^t B_N}_{2^{tem}} + \underbrace{(A'_M + B'_M \cdot d_M^t)}_{3^{tem}} + \underbrace{C_{MN}}_{4^{tem}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{11}^t \\ \vdots \\ x_{ij}^t \\ \vdots \\ x_{MN}^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11}^{t*} \\ \vdots \\ x_{ij}^{t*} \\ \vdots \\ x_{MN}^{t*} \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0 \quad (4.25)$$

para todo  $x^t = (x_{11}^t, \dots, x_{ij}^t, \dots, x_{MN}^t) \in \Omega_t$

Considerou-se na formulação que resulta na equação (4.25), um mercado de oligopólio. Utilizando-se o mesmo raciocínio, se formula a seguir, os problemas equivalentes, através das expressões apresentadas na seção 3.5.5, para os mercados de concorrência perfeita e monopólio.

#### • Concorrência Perfeita:

$$\begin{aligned} \text{Max } z(x) = \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t) = \\ \sum_{j=1}^N \int_0^{d_j^t} (A_j + B_{i,j} w) dw - \sum_{i=1}^M \int_0^{q_i^t} (A'_i + B'_i w) dw - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \int_0^{x_{ij}^t} C_{ij}(w) dw \end{aligned} \quad (4.26)$$

Derivando a expressão (4.26) em relação à quantidade transportada entre um par de mercados  $i$  e  $j$ ,  $x_{ij}$ , obtêm-se,

$$\frac{\partial \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t)}{\partial x_{ij}^t} = \frac{d}{dx_{ij}^t} \left[ \sum_{j=1}^N \int_0^{d_j^t} (A_j + B_{i,j} w) dw - \sum_{i=1}^M \int_0^{q_i^t} (A'_i + B'_i w) dw - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \int_0^{x_{ij}^t} C_{ij}(w) dw \right] \quad (4.27)$$

Resolvendo a equação (4.27) chega-se na seguinte expressão:

$$\frac{\partial \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t)}{\partial x'_{ij}} = (A_j + B_{t,j} d'_j) - (A'_i + B'_i q'_i) - C_{ij}(x'_{ij}) \quad (4.28)$$

A equação (4.28) será utilizada para formular o problema de inequação variacional dado pela equação (3.28).

• **Monopólio:**

$$\text{Max } z(x) = \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}^t) =$$

$$\sum_{j=1}^N d'_j (A_j + B_{t,j} d'_j) - \sum_{i=1}^M \int_0^{q'_i} (A'_i + B'_i w) dw - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ij}(x'_{ij}) x'_{ij} \quad (4.29)$$

Derivando a expressão (4.29) em relação à quantidade transportada entre um par de mercados  $i$  e  $j$ ,  $x'_{ij}$ , obtêm-se,

$$\pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}_t) = \frac{d}{dx'_{ij}} \left[ \sum_{j=1}^N d_j (A_j + B_j * d_j) - \sum_{i=1}^M \int_0^{q_i} (A'_i + B'_i w) dw - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ij}(x_{ij}) * x_{ij} \right] \quad (4.30)$$

Resolvendo a equação (4.30) chega-se na seguinte expressão:

$$\frac{\partial \pi_{t,i}(\mathbf{k}_t, \mathbf{x}')}{\partial x'_{ij}} = (A_j + B_{t,j} d'_j) + d'_j \frac{d(A_j + B_{t,j} d'_j)}{dd'_j} - (A'_i + B'_i q'_i) - C_{ij}(x'_{ij}) \quad (4.31)$$

A equação (4.31) equivale à equação (3.37) e será utilizada para formular o problema de inequação variacional dado pela equação (3.38).

• **Generalização do modelo:**

O modelo neste ponto é estendido de forma a permitir a sua generalização para todas as estruturas competitivas, ou seja, o oligopólio e seus extremos equivalentes, a competição perfeita e o monopólio. Para tal, será adicionado um operador  $T'_{ij}$  na formulação do problema, conforme segue. O segundo termo dos vetores de derivadas depende do valor assumido para  $T'_{ij}$ . Logo, se o mercado  $i$  é oligopolístico, assume-se que  $T'_{ij} = x'_{ij}$ . Por sua vez, quando o mercado produtor  $i$  é monopolístico, assume-se que  $T'_{ij} = d'_j$ . Por fim, se o mercado  $i$  é perfeitamente competitivo, assume-se que  $T'_{ij} = 0$ . Neste último caso, o segundo termo é cancelado da formulação final do problema de inequação variacional. Desta forma, a equação (4.20) pode ser reescrita da forma que é apresentada a seguir:

$$\left\langle \begin{bmatrix} -(A_1 + B_{1,1}d_1^t) - T'_{11}B_1 + (A'_1 + B'_1 \cdot q_1^t) + C_{11} \\ \vdots \\ -(A_j + B_{j,j}d_j^t) - T'_{ij}B_j + (A'_i + B'_i \cdot q_j^t) + C_{ij} \\ \vdots \\ -(\underbrace{A_N + B_{t,N}d_N^t}_{1^{o\text{tem}}} - \underbrace{T'_{MN}B_N}_{2^{o\text{tem}}} + \underbrace{(A'_M + B'_M \cdot q_M^t)}_{3^{o\text{tem}}}) + \underbrace{C_{MN}}_{4^{o\text{tem}}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_{11}^t \\ \vdots \\ x_{ij}^t \\ \vdots \\ x_{MN}^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{11}^{*} \\ \vdots \\ x_{ij}^{*} \\ \vdots \\ x_{MN}^{*} \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0 \quad (4.32)$$

Para todo  $x^t = (x_{11}^t, \dots, x_{ij}^t, \dots, x_{MN}^t) \in \Omega_t$

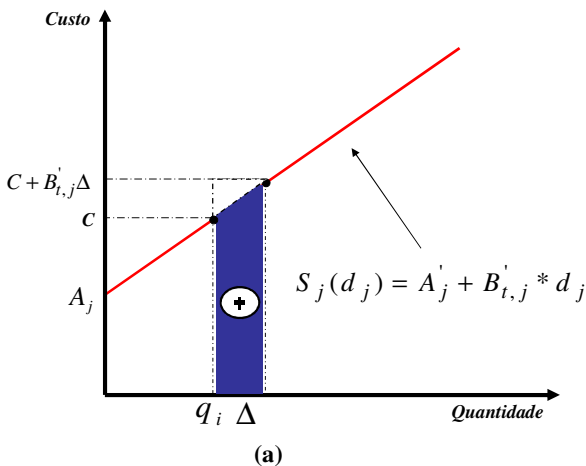
Com o modelo de equilíbrio de curto prazo apresentado nesta seção, determina-se o nível de produção ótimo, o fluxo de produto transportado para cada mercado consumidor, assim como o lucro das vendas obtido pelas empresas a cada período  $t$ . Utilizando estes lucros como dado de entrada para o jogo de longo prazo, apresentado na seção 4.3, obtém-se a estratégia de equilíbrio de expansão de capacidade ao longo do horizonte de planejamento. Estes resultados podem ser determinados utilizando-se a programação dinâmica reversa, conforme algoritmo a ser apresentado na seção 4.4.3.

Para um melhor entendimento das equações (4.24), (4.28) e (4.31), formula-se a seguir uma interpretação gráfica de tais derivadas, utilizando-se para tal o modelo de oligopólio, já que tal interpretação é análoga ao dos outros modelos de concorrência perfeita e monopólio.

Seja  $\Delta$ , um incremento da quantidade transportada,  $x_{ij}$ , entre um par de mercados  $i$  e  $j$ . As figuras (4.6), (4.7) e (4.8) ilustram graficamente o efeito deste incremento no custo total de produção do produtor  $i$ , na receita do produtor  $i$  no mercado  $j$ , assim como nos custos de transporte do produtor  $i$  para o mercado  $j$ , respectivamente.

Verifica-se pela figura (4.6), que um aumento  $\Delta$  na quantidade transportada implicará em um aumento de igual quantidade na produção e, portanto, ocasionando um aumento no custo total de produção, representado pela área em destaque do gráfico da figura (4.6).

**Figura 4.6** - Efeito de um incremento na quantidade ofertada no custo total de produção do produtor  $i$ .

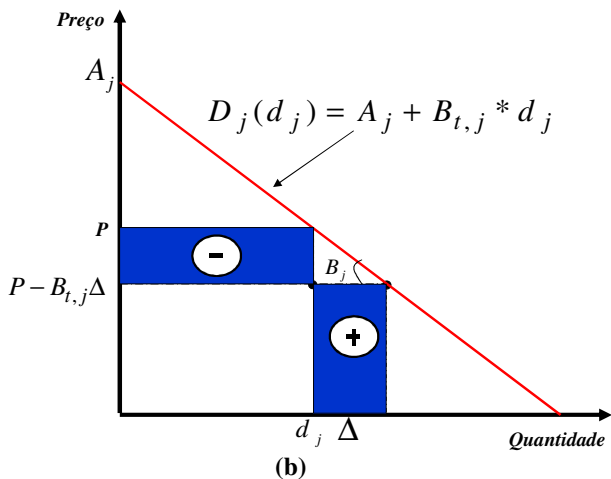


Fonte: elaborado pelo autor.

Por outro lado, o referido incremento ocasionará uma redução de preço no mercado  $j$  associada à quantidade adicional transportada, o que implicará em uma perda de receita, dada pela área em destaque de sinal negativo do gráfico da figura (4.7).

Em compensação, haverá um aumento de receita, causado pelo aumento da produção de quantidade  $\Delta$ , dado pela área em destaque de sinal positivo do referido gráfico.

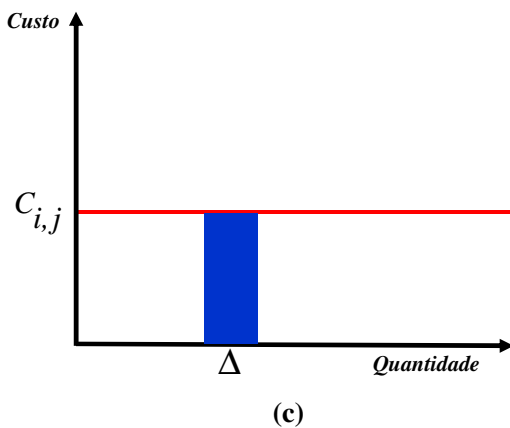
**Figura 4.7** - Efeito de um incremento na quantidade ofertada na receita do produtor  $i$  no mercado  $j$ .



Fonte: elaborado pelo autor

E, finalmente, o incremento na quantidade transportada implicará, também, em um aumento dos custos de transporte, representado no gráfico da figura (4.8).

**Figura 4.8** – Efeito de um incremento na quantidade transportada no custo de transporte do produtor  $i$  para o mercado  $j$ .



Fonte: elaborado pelo autor.

Em outras palavras, sejam  $S_i$  e  $D_j$  as funções inversas da curva de oferta do produtor  $i$  e de demanda do mercado  $j$ , respectivamente, a área em destaque na curva de oferta da figura 4.6, que representa o aumento do custo de produção é dada por  $S_i \Delta$ . Na curva de demanda a área referente ao ganho de receita é dada por  $D_j \Delta$  e a área referente a perda de receita é dada por  $B_{t,j} \Delta d_j^t$ .

Pode-se então representar o ganho final da empresa  $i$  relativo a este incremento pela equação a seguir:

$$\frac{\partial \pi_{t,i}}{\partial \Delta} = -S_i \Delta - C_{ij} \Delta + D_j \Delta + B_{t,j} \Delta d_j^t \quad (4.33)$$

onde  $d_j$  é a contribuição da empresa  $i$  para a demanda em  $j$ , ou seja,  $x_{ij}^t$ . Se  $\Delta$  for infinitesimal tem-se:

$$\frac{\partial \pi_{t,i}}{\partial \Delta} = -S_i - C_{ij} + D_j + B_{t,j} d_j^t \quad (4.34)$$

Estendendo-se a derivada representada na equação (4.34) com as funções inversas lineares da oferta e da demanda consideradas no presente modelo, tem-se:

$$\frac{\partial \pi_{t,i}}{\partial \Delta} = -(A_i' + B_i' q_i^t) - C_{ij} + (A_j + B_{t,j} d_j^t) + B_{t,j} d_j^t \quad (4.35)$$

Considerando-se que o coeficiente  $B_{t,j}$  é negativo e que  $d_j^t = x_{ij}$ , tem-se:

$$\frac{\partial \pi_{t,i}}{\partial \Delta} = -A_i' - B_i' q_i^t - C_{ij} + A_j - 2B_{t,j} x_{ij}^t \quad (4.36)$$

A equação (4.36) equivale à equação (3.47) e (4.24).

#### 4.5. O ALGORITMO DO MODELO PROPOSTO

Os componentes de decisão do modelo proposto consideram o tamanho da expansão  $k_{t,i}$ , o momento  $t$  da expansão que maximizam a equação (4.7), referente ao jogo de longo prazo. Considerando-se fixas as capacidades, o lucro ótimo de curto prazo de uma empresa  $i$  no tempo  $t$ ,  $\pi_{t,i}^*$ , a quantidade produzida  $q_i^*$  e o fluxo de produção para os mercados consumidores,  $x_{ij}^*$ , devem ser obtidos do equilíbrio do jogo de curto prazo. A estratégia ótima, resultado dos equilíbrios é determinada, portanto, através do seguinte algoritmo geral do modelo proposto nesta tese:

##### Algoritmo geral:

- **Passo 1– Inicialização:** ler dados iniciais, definir o número de estados em função das capacidades possíveis de cada empresa.
  - a. Estabeleça  $t=T$ .
  - b. Para todos os estados e empresas, obter equilíbrio de curto prazo resolvendo o problema de inequação variacional dado pela equação (4.32), determinando as quantidades a serem produzidas, transportadas e o lucro ótimo para todos os estados e empresas, conforme algoritmo de projeção apresentado mais adiante nesta seção.
  - c. Para todos os estados e empresas, usando a equação recursiva (4.7), determine a expansão  $k_{T,i}^*$  que maximize  $Z_{T,i}^*$ .
  - d. Estabeleça  $t = T - 1$ .
- **Passo 2– Critério de parada:** se  $t = -1$ , parar e ir para o passo 4.
- **Passo 3 – Períodos intermediários:**  
Para cada período  $t$ :



- a. Para todos os estados e empresas, obter o equilíbrio de curto prazo resolvendo o problema de inequação variacional dado pela equação (4.32), determinando as quantidades a serem produzidas, transportadas e o lucro ótimo da cada empresa  $i$ , conforme algoritmo de projeção.
- b. Para todos os estados e empresas, usando a equação recursiva (4.7), determine a expansão  $k_{t,i}^*$  que maximize  $Z_{t,i}^*$ .
- c. Estabeleça  $t = t - 1$ ;
- d. Ir para o passo 2.

- **Passo 4 – Apresentar resultados.**

**Algoritmo de Projeção (equilíbrio de curto prazo):**

Seja o VIP  $\left\langle F(x^{t*}), x^t - x^{t*} \right\rangle \geq 0, \forall x \in \Omega_t$ , que no modelo de equilíbrio de curto prazo apresentado nesta tese é dado pela equação (4.32) e onde  $x^t = (x_{11}^t, \dots, x_{ij}^t, \dots, x_{MN}^t)$ . Então os seguintes passos poderão ser utilizados para obtenção de  $x^{t*}$ .

- **Passo 1** – Obtenha  $x^{t,0} \in \Omega_t$ . Faça  $n=0$ .
- **Passo 2** – Calcule  $x^{t,n+1} \leftarrow P_{\Omega}(x^{t,n} - \alpha_n F(x^{t,n}))$ .
- **Passo 3** – Se  $\|x^{t,n+1} - x^{t,n}\| > \varepsilon$ , faça  $n \leftarrow n + 1$  e volte ao passo 2.
- **Passo 4** – Apresente  $x^{t,n+1}$ .

A demonstração de convergência do algoritmo do jogo de curto prazo é apresentada em Nagurney (1999, capítulo 2, páginas 52-54), onde os resultados da convergência são declarados no teorema 2.8 e as condições para o teorema são afirmadas nas premissas 1.1 e 2.1, do referido livro.

Com relação ao jogo de longo prazo, conforme apresentado na seção 4.3, é considerada a premissa de um movimento sequencial entre as empresas. Se as empresas tomam suas decisões em sequência, o jogo finito tem um único equilíbrio perfeito em subjogo e pode ser resolvido utilizando-se a programação dinâmica, conforme Fudenberg & Tirole (1991, capítulo 13).

No próximo capítulo a aplicação do modelo será ilustrada com um exemplo numérico e os comportamentos das empresas no contexto do equilíbrio competitivo do modelo proposto serão apresentados e analisados.

## 5. APLICAÇÃO NUMÉRICA DO MODELO

### 5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados exemplos numéricos de forma a ilustrar o funcionamento do modelo de expansão de capacidade proposto nesta tese. É feita uma série de análises de sensibilidade relativas a alguns parâmetros assumidos como *input* do modelo.

O algoritmo para obtenção da estratégia ótima de expansão de capacidade, descrito no capítulo anterior, foi implementado através de um sistema computacional, escrito em linguagem DELPHI 7.0 para Windows, e rodado em um microcomputador Pentium Dual Core 2.0 GHz com memória de 3GB e sistema operacional de 32 Bits Windows Vista Home Basic. O tempo de execução total do programa para a configuração básica utilizada neste trabalho (rodada base) foi medido em torno de 1,69 segundos. Mais adiante neste capítulo são tecidos comentários a respeito de problemas de maior porte e seu impacto no tempo computacional.

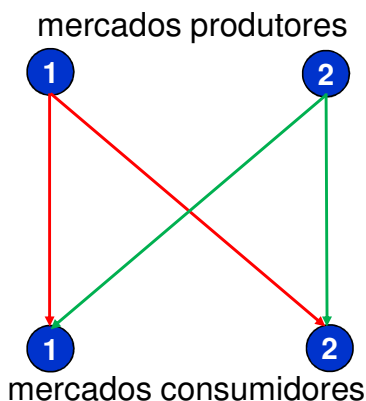
O desempenho do modelo foi testado para um exemplo numérico com estrutura de mercado e dados de grandeza semelhante ao apresentado em Murto et. al. (2004), incorporando-se, entretanto, a espacialidade dos mercados consumidores. O horizonte de planejamento utilizado é de 20 anos.

Em um caso real, para se modelar a estrutura espacial do problema recomenda-se responder a duas questões básicas: (1) Em uma região produtora existem empresas que dominam o mercado? Caso existam deve-se separá-las em diferentes nós da estrutura espacial. Os grandes jogadores do mercado têm a capacidade de influenciar o preço e, como tal, sua estratégia é identificar o nível de produção que maximize o seu lucro. Consequentemente empresas de grande porte devem ser destacadas e serem por si só um nó da estrutura espacial, dado que interessa analisar seu comportamento individualmente; (2) Existem várias empresas com capacidades menores e pulverizadas em uma só região? Se existirem, deve-se reuní-las em apenas um nó da estrutura espacial. Empresas de menor porte, com pouca participação no mercado, não têm a possibilidade de influenciar o preço e sua estratégia, diferentemente de empresas maiores, é sempre produzir o que puder de forma a maximizar o seu lucro. Assim sendo, de forma a simplificar a modelagem do problema, pode-se agregar a oferta de várias empresas menores concentradas em uma região, em um só nó da estrutura

especial. Portanto, uma região produtora pode estar representando uma ou mais empresas, dependendo de como se definiu a estrutura espacial.

No exemplo teórico apresentado neste trabalho será adotada a configuração espacial bipartido. A rede de produtores e consumidores é representada pela figura 5.1, onde são considerados nos nós superiores os mercados produtores ( $i = 1,2$ ) e nos nós inferiores os mercados consumidores ( $j = 1,2$ ). Adota-se neste exemplo numérico uma estrutura simples bipartida pelo fato de que o objetivo desta tese é analisar o efeito da espacialidade do mercado na estratégia em equilíbrio das expansões de capacidades das empresas. Outras estruturas de rede complexas poderiam ser incorporadas sem perda de generalidade do modelo, entretanto, esta extensão faria crescer significativamente os recursos computacionais.

**Figura 5.1** – Estrutura espacial do exemplo numérico.



Fonte: elaborado pelo autor.

Existem custos logísticos para o transporte de produtos entre as regiões produtoras e consumidoras. No nosso exemplo, cada região produtora é representada por um único produtor. Para fins de comparação consideramos um caso equivalente, porém tendo em vista um mercado sem espacialidade.

Adicionalmente às premissas básicas do modelo de curto prazo apresentadas na seção 4.4.1, foram considerados ainda as seguintes premissas gerais e parâmetros para a análise do caso base e do exemplo equivalente, sem os custos logísticos:

- 1) O horizonte de planejamento é de 20 (anos), isto é,  $\Gamma = \{20, 19, 18, \dots, 0\}$ . Conforme mencionado na seção 4.3, assume-se um número de períodos suficientemente grande de modo que as decisões ótimas no início do horizonte de planejamento sejam consistentes com a solução de um problema com um horizonte de planejamento infinito.
- 2) O fator de desconto  $\delta$ , constante ao longo do tempo, é de 0,893, o que representa uma taxa de desconto de 12%.
- 3) O custo de incremento de uma unidade de capacidade de instalação é de \$5.
- 4) A capacidade inicial é de 10 unidades para ambas as empresas e refere-se à capacidade no início do horizonte de planejamento.
- 5) Os produtores têm uma capacidade máxima de 80 unidades. A capacidade máxima foi estabelecida devido a restrições computacionais e é assumido ser tão elevado que uma empresa nunca irá usar este limite e por isso não afeta o equilíbrio. Tal limite foi definido arbitrariamente, mas também poderia ser facilmente determinada assumindo que cada empresa estaria disposta a fornecer toda a demanda do mercado.
- 6) O intercepto e a inclinação da curva da oferta ( $y = A' + B'x$ ) são  $A' = 1,2600$  e  $B' = 0,2770$ , para ambas as empresas.
- 7) O intercepto e a inclinação da curva da demanda ( $y = A + Bx$ ) são  $A = 17,2534$  e  $B = -0,5$ , para a região de consumo 1, e  $A = 18,7036$  e  $B = -0,5$ .
- 8) O coeficiente  $B$  da curva de demanda cresce a uma taxa de 10% ao ano. Na seção 4.4.1 detalhou-se o mecanismo de variação de  $B$  ao longo do tempo.

- 9) O fator de economia de escala dos investimentos,  $\alpha$ , é inicialmente de 1,000, para ambas as empresas. Esta premissa especifica que há retornos constantes de escala para o caso base.
- 10) Para o caso base, os custos logísticos entre a empresa 1 e os mercados consumidores 1 e 2 são \$1,45 e \$1,24, respectivamente, e os custos logísticos entre a empresa 2 e os mercados consumidores 1 e 2 são igualmente \$1,45 e \$1,24, respectivamente.
- 11) A probabilidade da empresa  $i$  investir no período  $t$ ,  $p_{t,i}$ , é inicialmente de 0,5 para ambas empresas. Assume-se que os tomadores de decisão são neutros ao risco com relação a esta incerteza. Neste caso, assume-se que a regra de valor esperado é apropriada (Neumann e Morgenstern, 1944, Apud Cusinato, 2003).
- 12) O intercepto e a inclinação da curva da demanda inversa ( $y = A + Bx$ ) para o caso sem custos logísticos, ou seja considerando um mercado interno, é  $A = 17,9785$  e  $B = -0,25$ . Para este caso, assumiu-se que os produtores e os consumidores estão concentrados em uma mesma região geográfica, estes parâmetros representam a soma das demandas das regiões 1 e 2.
- 13) Para o caso sem custos logísticos o pressuposto 10 não é tomado em consideração. Assim, os custos logísticos são considerados iguais a zero.

Os dados comuns às diferentes análises realizadas estão sumarizados no quadro 5.1.

**Quadro 5.1** – Premissas básicas comuns a todas as análises de sensibilidade.

Descrição dos Parâmetros	Valores
Custo de investimento - empresas 1 e 2	\$ 5
Capacidade Máxima - empresas 1 e 2	80
Parâmetros A' e B' do custo variável de produção da empresa 1	1,260 0,227
Parâmetros A' e B' do custo variável de produção da empresa 2	1,260 0,227
Número de períodos (horizonte de planejamento)	20
Taxa de desconto do fluxo de caixa	0,120
Taxa de crescimento da demanda (Cte B) - regiões consumidoras 1 e 2	0,100

Fonte: elaborado pelo autor.

No quadro 5.2 estão sumarizados os dados de entrada do modelo, relativos à rodada base, que serão objetos de análises de sensibilidade a seguir.

## 5.2. ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 5.2.1. Considerações iniciais

As estratégias de equilíbrio de curto e longo prazo são obtidas de acordo com o algoritmo apresentado na seção 4.5. Entende-se por curto prazo o período em que estão sendo realizadas as vendas, ou seja, um ano e por longo prazo todo o horizonte de planejamento do modelo, ou seja, 20 anos. Ressalta-se que o objetivo do algoritmo é determinar o investimento em expansão de capacidade e o nível de produção a cada período. Estas variáveis são interdependentes, mas têm naturezas diferentes. O investimento exerce influência nos lucros das empresas em caráter permanente, enquanto que o nível de produção impacta apenas o lucro do período. Como visto no capítulo 4, a estratégia ótima de investimentos é obtida a partir do equilíbrio de longo prazo e determina a decisão de investimento em expansão de capacidade ao longo dos anos. A escolha do nível de produção em cada período, por sua vez, é obtida pelo equilíbrio de curto prazo e é determinada sem considerar os investimentos, porém, dependente da capacidade de produção da

empresa, construída pelos investimentos ao longo do tempo até o período atual.

**Quadro 5.2 – Dados do caso base.**

<b>Descrição dos Parâmetros</b>	<b>Valores da rodada base</b>
<b>Quantidade de empresas (regiões) produtoras</b>	<b>2</b>
<b>Quantidade de regiões consumidoras</b>	<b>2</b>
<b>Parâmetros A e B da curva de demanda da região consumidora 1</b>	<b>17,2534 -0,5</b>
<b>Parâmetros A e B da curva de demanda da região consumidora 2</b>	<b>18,7036 -0,5</b>
<b>Custo de transporte da empresa 1 para a região consumidora 1</b>	<b>1,450</b>
<b>Custo de transporte da empresa 1 para a região consumidora 2</b>	<b>1,240</b>
<b>Custo de transporte da empresa 2 para a região consumidora 1</b>	<b>1,450</b>
<b>Custo de transporte da empresa 2 para a região consumidora 2</b>	<b>1,240</b>
<b>Parâmetros A' e B' do custo variável de produção da empresa 1</b>	<b>1,260 0,227</b>
<b>Parâmetros A' e B' do custo variável de produção da empresa 2</b>	<b>1,260 0,227</b>
<b>Capacidade Inicial - empresa 1</b>	<b>10</b>
<b>Capacidade Inicial - empresa 2</b>	<b>10</b>
<b>Fator de economia de escala - empresa 1</b>	<b>1,000</b>
<b>Fator de economia de escala - empresa 2</b>	<b>1,000</b>
<b>Probabilidade de expandir no tempo t - empresa 1</b>	<b>0,500</b>
<b>Probabilidade de expandir no tempo t - empresa 2</b>	<b>0,500</b>

Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme apresentado no quadro 5.2, assume-se que as duas empresas são simétricas, ou seja, têm custos idênticos de produção e de transporte e a mesma capacidade inicial. Assim sendo, as empresas apresentam os mesmos resultados de equilíbrio para a expansão e fluxo de produção ao longo do horizonte de planejamento.

A figura 5.2, a seguir, ilustra as expansões resultantes do equilíbrio de longo prazo para uma das realizações randômicas da

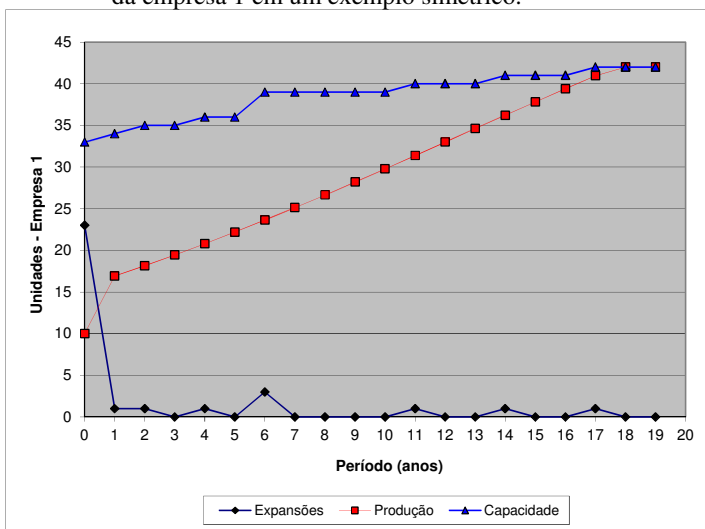


variável aleatória  $\theta_i$ , sendo  $i = \{1, 2\}$ , que governa o sequenciamento das empresas 1 e 2.

Observa-se que ambas as empresas operam abaixo de suas capacidades em grande parte do horizonte de planejamento. No final do tempo observado, entretanto, já com a demanda relativamente alta, as empresas passam a operar em sua capacidade máxima.

Cabe ressaltar, porém, que o plano de expansão mostrado no gráfico da figura 5.2 não reflete necessariamente a estratégia ótima da empresa, visto que podem existir muitas outras realizações randômicas da variável estocástica  $\theta_i$  que governa o sequenciamento dos investimentos das empresas. Como as decisões de investimentos e de produção dependem da distribuição de probabilidade de  $\theta_i$ , tais variáveis são também estocásticas.

**Figura 5.2** – Evolução das Expansões e Capacidades acumuladas da empresa 1 em um exemplo simétrico.



Fonte: elaborado pelo autor.

Assim sendo, para todos os exemplos numéricos apresentados nas seções seguintes, será utilizada a técnica de simulação de Monte Carlo<sup>22</sup>

<sup>22</sup> Para um claro entendimento sobre a técnica de simulação de Monte Carlo ver Andrade (2004).

para analisar a distribuição de probabilidades das variáveis de decisão do modelo. Portanto, o valor presente, a capacidade de produção e o fluxo de produção das empresas serão analisados tendo em vista 2000 realizações da variável aleatória  $\theta_i$  para cada período do horizonte de planejamento. Para cada simulação do valor da variável  $\theta_i$ , será utilizado o algoritmo dos jogos de longo prazo e de curto prazo de forma a calcular a distribuições de probabilidade do valor presente líquido, da expansão de capacidade, dos níveis de produção e volume transportado, para cada empresa e cada período, conforme o mecanismo geral do modelo, apresentado na figura 4.1.

Nas seções seguintes serão apresentadas as análises de sensibilidade variando os dados de entrada do modelo apresentado no quadro 5.2. Cada configuração de parâmetros será chamada de rodada.

Serão realizados os seguintes experimentos que visam demonstrar a importância de se considerar os custos de transporte na determinação da política ótima e validar o modelo, verificando sua consistência com o que se espera em termos de comportamento em relação às estratégias das empresas:

- (1) *Análise do modelo com simetria entre as empresas em um mercado espacial.*
- (2) *Comparação entre estruturas com e sem espacialidade.*
- (3) *Análise do modelo com assimetria entre as empresas nos custos de transportes.*
- (4) *Análise do modelo com assimetria nas capacidades iniciais de cada empresa.*
- (5) *Análise do modelo com assimetria na probabilidade de decidir quem investe a cada período (variável estocástica do modelo).*
- (6) *Análise do modelo com assimetria na economia de escala das empresas.*
- (7) *Análise do modelo com um número maior de empresas (oligopólio).*

### **5.2.2. Análise do modelo com simetria**

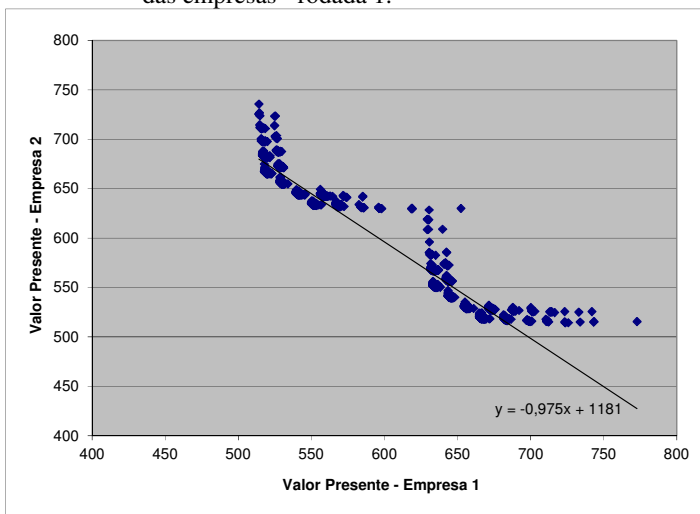
O objetivo desta seção é apresentar os resultados do modelo para um exemplo numérico, cujos dados são apresentados no quadro 5.2.

(rodada 1, também chamada de rodada base), que será utilizado como comparativo para o restante das análises apresentadas neste capítulo. Consideram-se duas empresas produtoras e duas regiões consumidoras, distribuídos espacialmente, tal como representadas na figura 5.1.

A figura 5.3 mostra o gráfico de dispersão do Valor Presente das empresas 1 e 2, resultante da rodada 1.

A reta de tendência do gráfico da figura 5.3,  $y = bx + a$ , foi obtida por regressão linear. Como se podia esperar, as distribuições do Valor Presente das empresas 1 e 2 são similares devido ao fato das empresas, neste exemplo, terem estruturas de custos idênticas. Isto pode ser mais claramente observado pelo coeficiente de regressão  $b$  da reta de tendência. O valor de  $|b|$  é 0,975, portanto próximo de 1, indicando uma forte simetria entre as empresas 1 e 2.

**Figura 5.3** – Gráfico de dispersão dos Valores Presentes das empresas - rodada 1.

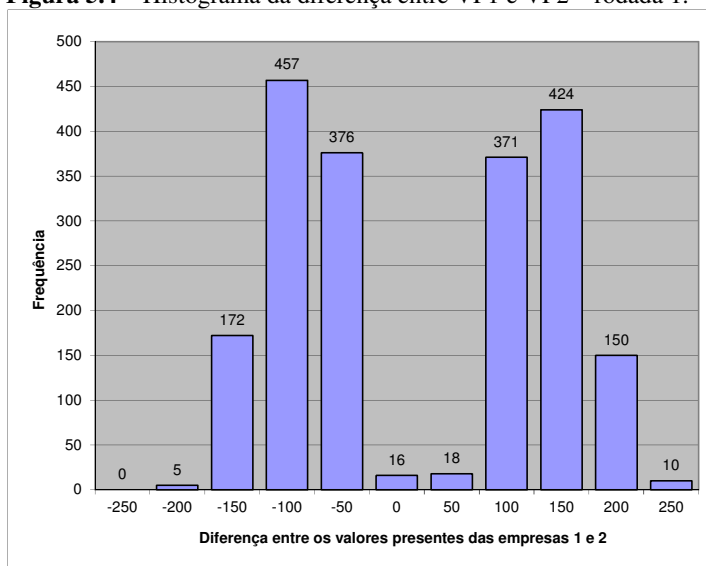


Fonte: elaborado pelo autor.

A simetria apresentada no resultado das empresas indica que as empresas têm chances iguais de obterem vantagem uma sobre a outra. O que pode ser determinante é a habilidade da empresa em estar atenta na tomada de decisão de expansão de sua capacidade. A análise deste comportamento será retomada mais à frente neste capítulo. É interessante observar, no momento, que na grande maioria das

realizações da simulação uma empresa ganha a dianteira em detrimento da derrocada da outra. Este comportamento pode ser mais facilmente observado pelo histograma da figura 5.4 que mostra a frequência das diferenças entre o Valor Presente da empresa 1 e 2 (VP1 e VP2), nas 2000 realizações da simulação.

**Figura 5.4** – Histograma da diferença entre VP1 e VP2 – rodada 1.



Fonte: elaborado pelo autor.

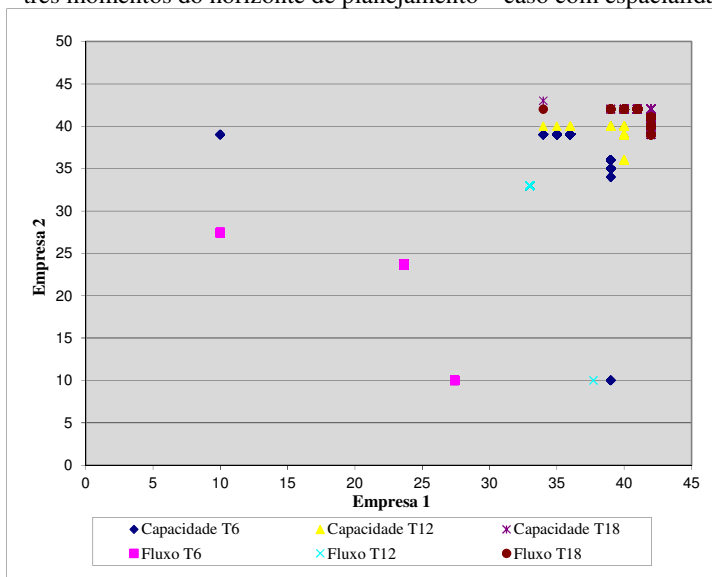
A relativa simetria apresentada nas frequências do histograma da figura 5.4, evidencia o comportamento do jogo de ganha e perde entre as empresas. As ocorrências próximas de zero indicam que o Valor Presente da empresa 1 é muito próximo ou igual ao Valor Presente da empresa 2. Na verdade isto ocorre em apenas 16 ocorrências, ou seja, em apenas 1% das realizações.

Passa-se a analisar a seguir o resultado da rodada 1 para as variáveis de decisão do modelo.

A figura 5.5 apresenta o gráfico de dispersão das capacidades e dos níveis de produção da rodada 1. Para cada período de tempo do horizonte de planejamento foi realizada uma simulação, com 2000 realizações, para se obter a distribuição das capacidades e dos fluxos de produção.

Para tornar mais simples a análise, são mostrados apenas os períodos 6, 12 e 18. A legenda ‘Capacidades T6’ no gráfico representa o conjunto de realizações das capacidades de produção das empresas 1 e 2 resultantes do equilíbrio no ano 6. Da mesma forma, a legenda ‘Fluxos T6’ representa o conjunto de realizações dos fluxos de produção das empresas 1 e 2 resultantes do equilíbrio no ano 6. O mesmo raciocínio descreve as legendas para as capacidades e fluxos de produção para os anos 12 e 18, ou seja, ‘Capacidade T12’, ‘Fluxo T12’, ‘Capacidade T18’ e ‘Fluxo T18’, respectivamente.

**Figura 5.5** – Gráfico de dispersão das capacidades e dos fluxos e em três momentos do horizonte de planejamento – caso com espacialidade.



Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se pela figura 5.5 que as empresas tendem a operar abaixo de sua capacidade em grande parte do horizonte de planejamento, indicando que as empresas decidem eventualmente não ofertar toda a sua capacidade, utilizando-se de sua flexibilidade operacional e influenciando no preço do mercado. Com uma maior demanda nos períodos finais, porém, estas passam a operar próximo ou em sua capacidade máxima, ratificando-se o que foi observado na figura 5.2, para uma das possíveis realizações da simulação.

No exemplo de Murto et. al (2004), entretanto, as empresas operam em sua capacidade máxima ao longo de todo o horizonte de planejamento (ver seção 4.4.1). Justifica-se este comportamento normalmente nos segmentos de infraestrutura, onde o custo marginal de produção é relativamente baixo, próximo de zero e a elasticidade da demanda é alta o suficiente, ou seja,  $\varepsilon > 1$ . Neste caso a receita marginal será sempre positiva para ambas as empresas independentemente do nível de produção. Isto implicará que as empresas operem quase sempre em suas capacidades máximas. Este é o caso de muitos modelos de expansão de capacidade investigados neste trabalho, onde o comportamento estratégico analisado é o momento de investir e não o nível de produção, uma premissa adotada em artigos de oligopólios dinâmicos, tais como, por exemplo, em Gilbert e Harris (1984), Ghemawat and Nalebuff (1990), Mills (1990) e Murto et al. (2004).

Esta premissa, porém, não é adotada no modelo desta tese. No presente trabalho, o nível de produção é uma variável de decisão e a cada período é determinada a produção ótima através de um jogo de equilíbrio de curto prazo Cournot-Nash, fixadas as capacidades das empresas no período em questão.

Um comportamento interessante a ser observado nos períodos finais do gráfico da figura 5.5 é o formato linear e simétrico das distribuições. Para um determinado período, enquanto realizações das capacidades e dos fluxos de produções permanecem praticamente constantes para uma empresa, estas variam para a outra empresa. Em seguida, a situação se inverte entre as empresas para uma segunda parte das realizações. Este comportamento demonstra, mais uma vez, que a competição entre as empresas caracteriza-se por um jogo de perde e ganha, com uma empresa líder, tomando a dianteira e a empresa em desvantagem perseguindo o melhor posicionamento possível no mercado.

### **5.2.3. Comparativo com uma estrutura sem espacialidade**

Nesta seção comparam-se os resultados da rodada 1, com espacialidade, com um exemplo que não considera os custos de transporte, o qual será chamado de rodada 2. Ou seja, a rodada 2 tem uma configuração na qual os produtores e consumidores estão concentrados em uma mesma região com custos de transporte nulos. Considerou-se que a demanda do único mercado consumidor é

equivalente à soma das demandas dos dois mercados consumidores da rodada 1. O objetivo desta análise é demonstrar a relevância em se considerar os custos de transporte em um modelo de expansão de capacidade. Os custos de transporte e parâmetros de demanda das duas rodadas são mostrados no quadro 5.3.

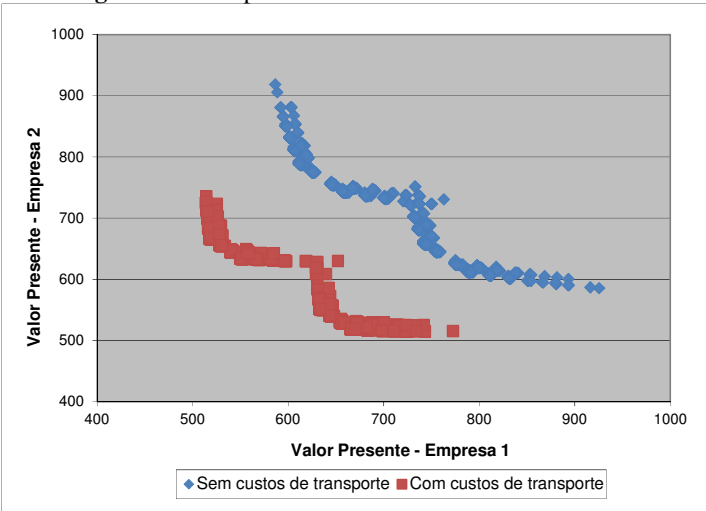
**Quadro 5.3** – Dados das rodadas 1(rodada base) e 2.

		Região 1	Região 2
Rodada 1	Custos de transporte - Empresa 1	1,4500	1,2400
	Custos de transporte - Empresa 2	2,4500	2,2400
	Curva da demanda (Ctes A e B)	17,2534 e -0,5	18,7036 e -0,5

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.6, a seguir, mostra os gráficos de dispersão do Valor Presente para as rodadas 1 e 2. A rodada 2 apresenta a mesma simetria da rodada 1, como era de se esperar. Porém, fica evidente que os custos logísticos exercem um impacto significativo sobre os lucros das empresas. Observa-se pelos gráficos da figura 5.6 que os retornos obtidos pelas empresas no exemplo sem custos de transporte são bem superiores.

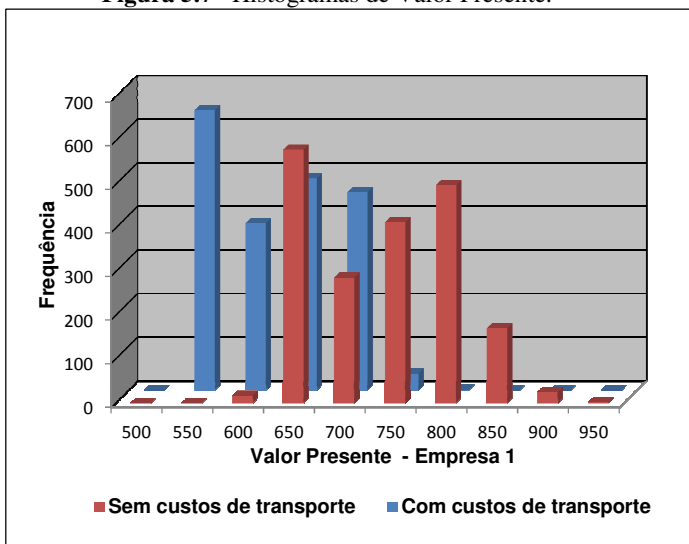
**Figura 5.6** – Dispersão do Valor Presente - rodadas 1 e 2.



Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.7 apresenta os histogramas do Valor Presente da empresa 1 (as duas empresas apresentam os mesmos resultados por serem simétricas), resultantes das rodadas 1 (com custos de transporte) e 2 (sem custos de transporte), respectivamente.

**Figura 5.7–** Histogramas de Valor Presente.



Fonte: elaborado pelo autor.

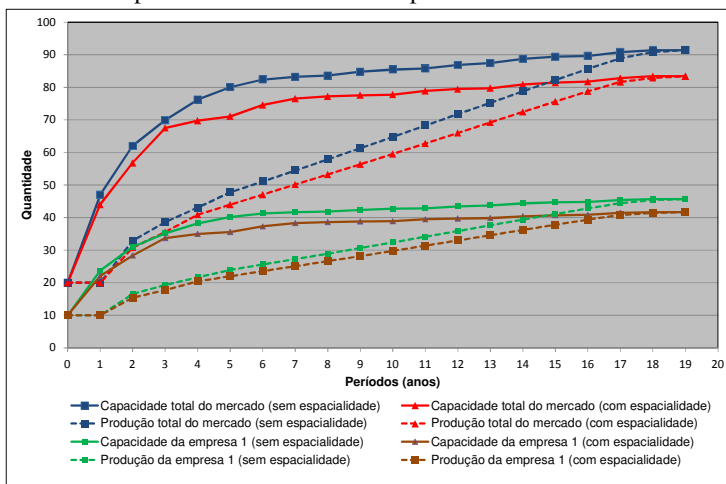
Os histogramas da figura 5.7 evidenciam os retornos mais baixos obtidos pelas empresas no caso com espacialidade, como é esperado.

A figura 5.8 apresenta as curvas de evolução da capacidade e do nível de produção do mercado, assim como, a capacidade e o nível de produção da empresa 1 ao longo do horizonte de planejamento para os casos com e sem custos logísticos. Os pontos das curvas representam a média dos valores obtidos para 2000 realizações de simulação Monte Carlo.

Observa-se pela figura 5.8 que o mercado em equilíbrio tem níveis mais altos de capacidade e de produção para o caso sem custos logísticos comparativamente ao caso com custos logísticos.



**Figura 5.8** – Capacidades e Produção em equilíbrio ao longo do tempo para os casos com e sem espacialidade.



Fonte: elaborado pelo autor.

Pode-se observar que a empresa 1 apresenta níveis mais altos de capacidade e de produção ao longo de todo o horizonte de tempo para o caso sem custos logísticos. Este comportamento pode ser explicado pelo fato das empresas assumirem um risco mais alto quando competindo em mercados espaciais, destacando a importância de se considerar a espacialidade do mercado ao se determinar a estratégia ótima de expansões de capacidade quando os custos logísticos entre as regiões de produção e de consumo são relevantes. Em outras palavras, ao ignorarem os custos de transporte que as empresas incorrem em uma competição de curto prazo na modelagem de investimentos em expansões de capacidade ao longo do tempo, os tomadores de decisão obtêm uma estratégia ótima diferente daquela obtida quando modelando o problema com custos logísticos.

Logo, acoplar o problema de expansão de capacidade para o jogo de longo prazo com o problema de oligopólio espacial para o jogo de curto prazo é fundamental para obtenção de tais resultados.

É também interessante notar pela figura 5.8 que o nível de produção está abaixo da capacidade máxima em quase todo o horizonte de planejamento. Entretanto, na medida em que a demanda cresce ao longo do tempo, as empresas tendem a produzir em sua capacidade máxima. Este comportamento pode ser em parte explicado pelo efeito do fim do horizonte de planejamento. Uma análise do comportamento

da produção das empresas ilustra uma das características distintas do modelo desta tese, conforme mencionado na seção 5.2.1, onde as decisões estratégicas dizem respeito não somente ao momento (tempo) e ao tamanho da expansão, mas também com relação às decisões de produção.

A figura 5.9 ilustra o comportamento do preço ao longo do tempo para os casos com e sem custos logísticos. Ambos os casos tem exatamente a mesma demanda total. Em um dos casos consideram-se duas regiões (regiões 1 e 2) e no outro caso considera-se somente uma região (região 1). Os preços representam a média dos resultados obtidos das 2000 realizações da simulação de Monte Carlo realizada a cada período.

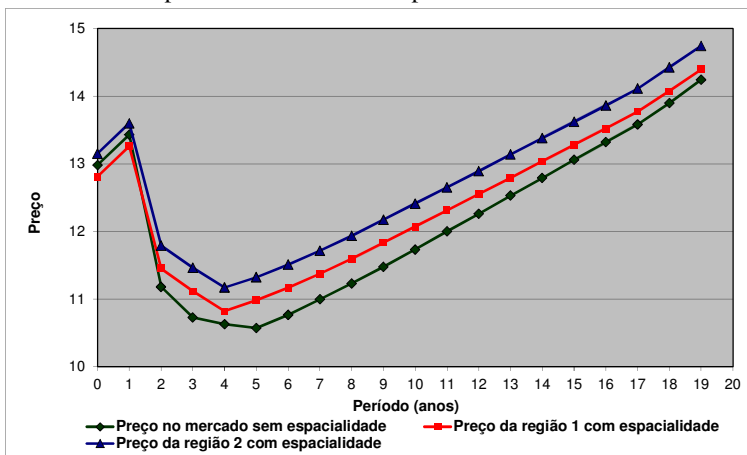
Observa-se que os preços do caso sem espacialidade são mais baixos do que os preços das regiões 1 e 2. Dada a premissa que não há nenhuma outra variável adicional influenciando o comportamento das empresas, tais como a renda da população ou taxa de juros, uma vez mais é demonstrado que a oferta total tende a ser mais baixa em mercados distribuídos espacialmente do que em mercados com somente uma região de consumo, conforme já havia sido mencionado anteriormente. As curvas de preços apresentadas na figura 5.9 refletem a oferta nas regiões de consumo ao longo do tempo. No ano 2, depois de investimentos no período 1, as empresas aumentam significativamente sua produção resultando em uma queda de preço. A partir do período 3 em diante, o nível de produção cresce a um ritmo mais lento. Como a demanda está sempre crescendo, de acordo com a premissa assumida no modelo, os preços tendem igualmente a crescer ao longo do tempo.

Sob uma perspectiva de longo prazo este exemplo ilustra o efeito do valor da flexibilidade<sup>23</sup> (*flexibility value effect*) das empresas vis a vis ao efeito de se investir mais cedo (*commitment effect*), o que significa que as empresas devem contrapor o efeito de postergar investimentos irreversíveis com o impacto de se investir para ganhar vantagem estratégica sobre o concorrente.

---

<sup>23</sup> O impacto do efeito do valor da flexibilidade e o efeito de se investir mais cedo é descrito em mais detalhes em Smit and Trigeorgis, 2004, capítulo 6, páginas 255-258.

**Figura 5.9** – Comportamento de Preços em equilíbrio ao longo do tempo para casos com e sem espacialidade.



Fonte: elaborado pelo autor.

Sob uma perspectiva de curto prazo, o modelo captura a flexibilidade operacional, quando permite que as empresas variem sua oferta de produção para influenciar preços. Ou seja, em um mercado oligopolístico, as empresas podem compensar eventuais erros de dimensionamento de sua capacidade estabelecendo níveis mais baixos de produção para forçar o aumento de preços.

## 5.2.4. Análise do modelo com assimetria

### 5.2.4.1. Assimetria nos custos logísticos

Nesta seção o modelo é aplicado variando-se os custos de transporte, impondo-se, assim, uma assimetria de custos entre as empresas. O objetivo deste exemplo é analisar a vantagem que uma empresa tem sobre a outra na competição quando incorrem em diferentes custos logísticos e qual o impacto desta assimetria no fluxo de caixa das empresas.

São utilizados os mesmos parâmetros da rodada 1, porém, apenas a empresa 2 terá seus custos de transporte progressivamente aumentados em três aplicações do modelo, chamadas de rodadas 3, 4 e 5, conforme dados apresentados no quadro 5.4.

**Quadro 5.4** – Dados das rodadas 3, 4 e 5.

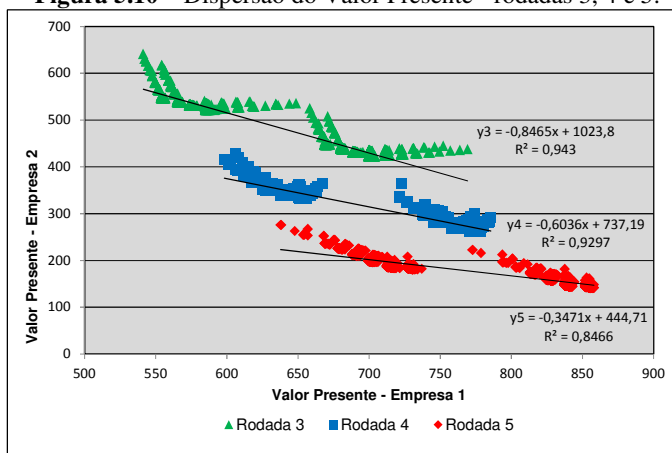
		Região 1	Região 2
Rodada 3	Empresa 1	\$1,4500	\$1,2400
	Empresa 2	\$2,4500	\$2,2400
Rodada 4	Empresa 1	\$1,4500	\$1,2400
	Empresa 2	\$4,4500	\$4,2400
Rodada 5	Empresa 1	\$1,4500	\$1,2400
	Empresa 2	\$6,4500	\$6,2400

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.10, a seguir, mostra os resultados das distribuições do Valor Presente para as rodadas 3, 4 e 5. A inclinação das retas de regressão linear é menos acentuada na medida em que os custos de transporte aumentam, indicando uma vantagem progressiva para a empresa 1 na medida em que os custos logísticos crescem para a empresa 2. Esta situação fica mais evidente analisando os coeficientes de regressão  $|a|$  das curvas que representam as rodadas 4 e 5, cujos valores 0,6036 e 0,3471, respectivamente, demonstram a assimetria entre as duas empresas.

Observa-se, também, que na rodada 3 a empresa 2, apesar de ter custos de transporte superiores, supera os retornos obtidos pela empresa 1 em algumas realizações da simulação. É o caso dos pontos plotados do lado esquerdo do gráfico da referida rodada. Estas ocorrências demonstram mais uma vez que, mesmo em desvantagem de custos, uma empresa pode superar a outra empresa e isto dependerá da capacidade da empresa em estar atenta ao momento ideal para expandir sua capacidade, situação esta que será explorada na seção 5.2.4.3 deste capítulo.

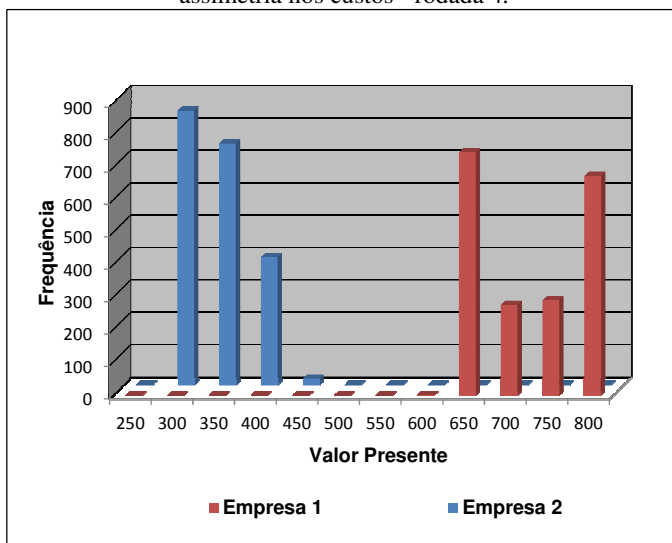
**Figura 5.10 – Dispersão do Valor Presente - rodadas 3, 4 e 5.**



Fonte: elaborado pelo autor.

A vantagem da empresa 1 sobre a empresa 2 é evidenciada nos gráficos de histograma da rodada 4, apresentados na figura 5.11, conforme segue.

**Figura 5.11 – Histogramas do Valor Presente para um caso de assimetria nos custos - rodada 4.**



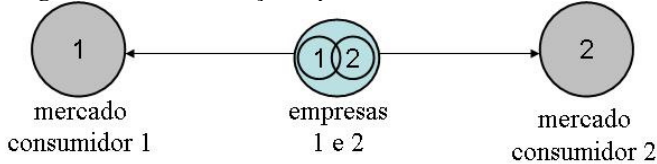
Fonte: elaborado pelo autor.

Para esta rodada, todas as realizações do Valor Presente da empresa 1 são significativamente superiores àquelas obtidas pela empresa 2. Explica-se tal comportamento pelo fato da empresa 1 ser mais competitiva, por ter seus custos de transporte bem menores que a empresa 2.

Em seguida testou-se o modelo para casos especiais de distribuição espacial entre os mercados produtores e consumidores para se obter uma análise de sensibilidade do efeito dos custos logísticos em casos extremos de distribuição espacial entre os mercados.

No primeiro caso, chamado de rodada 6, os produtores estão localizados na mesma região e equidistantes dos dois mercados consumidores, conforme ilustrado na figura 5.12, conforme segue.

**Figura 5.12** – Distribuição espacial dos mercados - rodada 6.



Fonte: elaborado pelo autor.

Utilizou-se os mesmos dados da rodada base, porém, com os custos de transportes caracterizando a equidistância entre os mercados, conforme quadro 5.5.

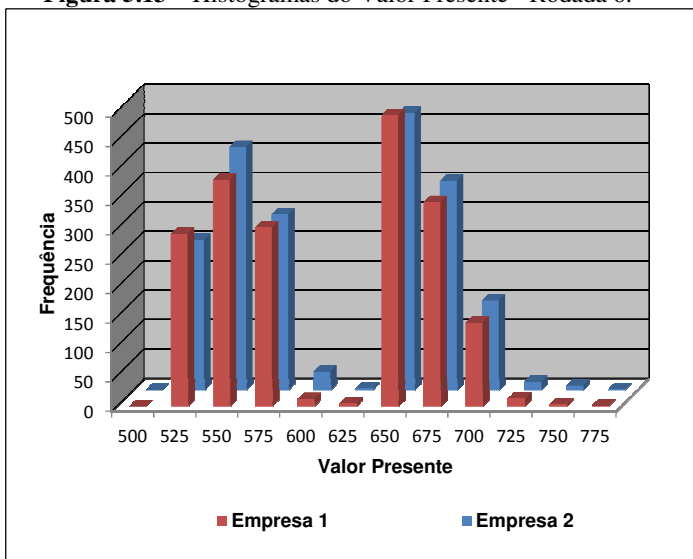
**Quadro 5.5** – Custos de transporte – rodada 6.

		Região 1	Região 2
Rodada 6	Empresa 1	\$1,3450	\$1,3450
	Empresa 2	\$1,3450	\$1,3450

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.13, a seguir, apresenta os histogramas dos retornos das empresas para a rodada 6.

**Figura 5.13** – Histogramas do Valor Presente - Rodada 6.

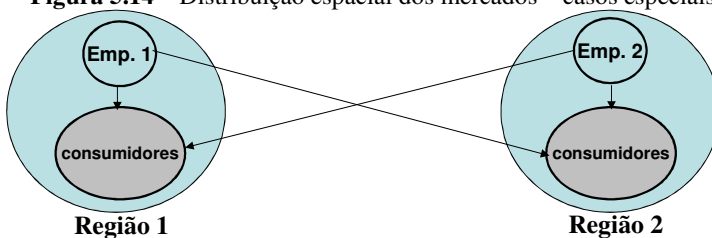


Fonte: elaborado pelo autor.

Independente das distâncias entre o mercado produtor e os mercados consumidores, observou-se para este caso que as empresas apresentam estratégias de expansão e retornos (Valor Presente) muito similares, já que estas se localizam na mesma região e têm os mesmos custos logísticos.

No segundo caso, a empresa 1 localiza-se em uma região consumidora e a empresa 2 em outra região consumidora, conforme ilustrado na figura 5.14.

**Figura 5.14** – Distribuição espacial dos mercados – casos especiais.



Fonte: elaborado pelo autor.

Foram realizadas várias rodadas, com distâncias cada vez maiores entre os dois mercados. Os custos logísticos para esta análise de sensibilidade são apresentados no quadro 5.6.

**Quadro 5.6** – Custos de transporte - rodadas 7 a 10.

		Região 1	Região 2
Rodada 7	Empresa 1	0,0000	2,6900
	Empresa 2	2,6900	0,0000
Rodada 8	Empresa 1	0,0000	4,6900
	Empresa 2	4,6900	0,0000
Rodada 9	Empresa 1	0,0000	8,6900
	Empresa 2	8,6900	0,0000
Rodada 10	Empresa 1	0,0000	16,6900
	Empresa 2	16,6900	0,0000

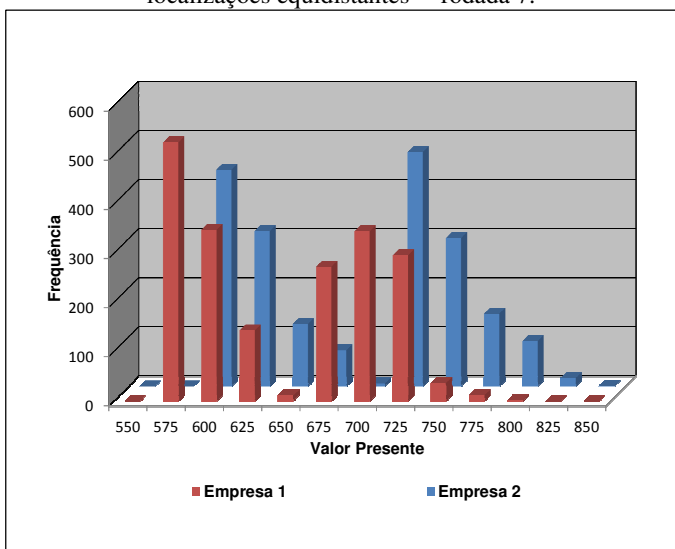
Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados dos histogramas de realizações do Valor Presente das duas empresas para a rodada 7 são apresentados nas figuras 5.15.

Observa-se que os histogramas apresentados na figura 5.15 demonstram uma vantagem da empresa 2 em relação a empresa 1. Isto pode ser explicado pelo fato da empresa 2 estar localizada na região de maior demanda, apesar dos custos de transporte não serem ainda significativamente altos.



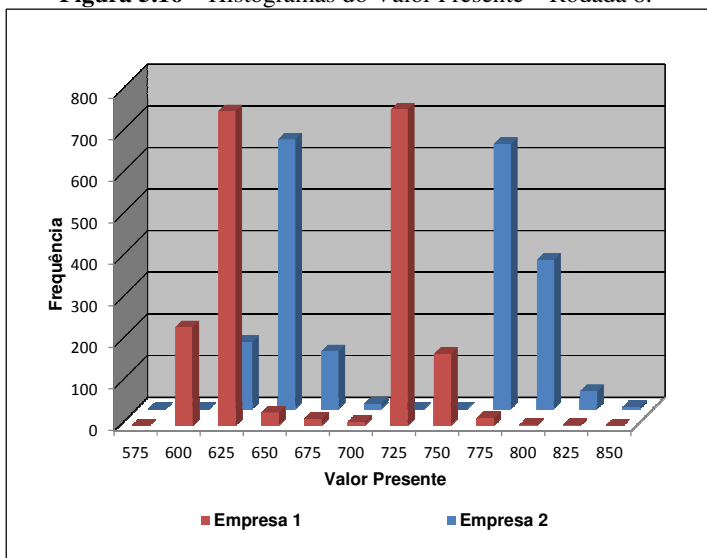
**Figura 5.15** – Histogramas de Valor Presente para localizações equidistantes – rodada 7.



Fonte: elaborado pelo autor.

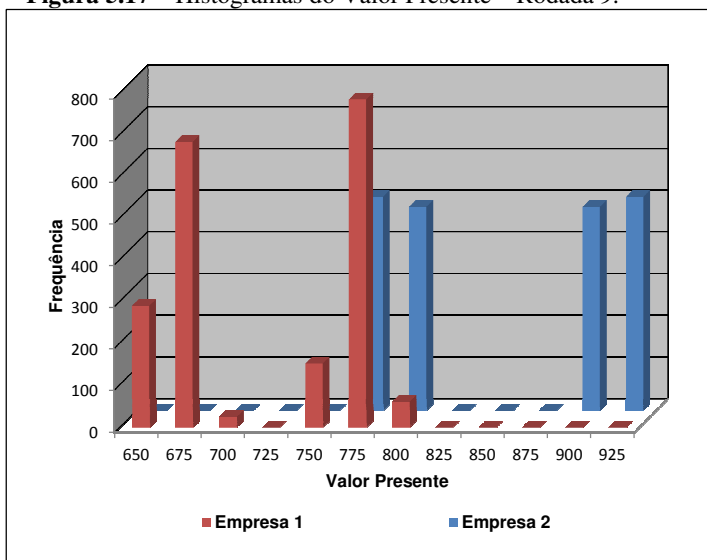
À medida que os custos de transporte vão crescendo, conforme considerado nas rodadas 8, 9 e 10, a vantagem da empresa 2, mais próxima da região de maior demanda, passa a ser ainda mais evidente, conforme pode ser observado nos histogramas das figuras 5.16, 5.17 e 5.18, a seguir.

**Figura 5.16 – Histogramas do Valor Presente – Rodada 8.**



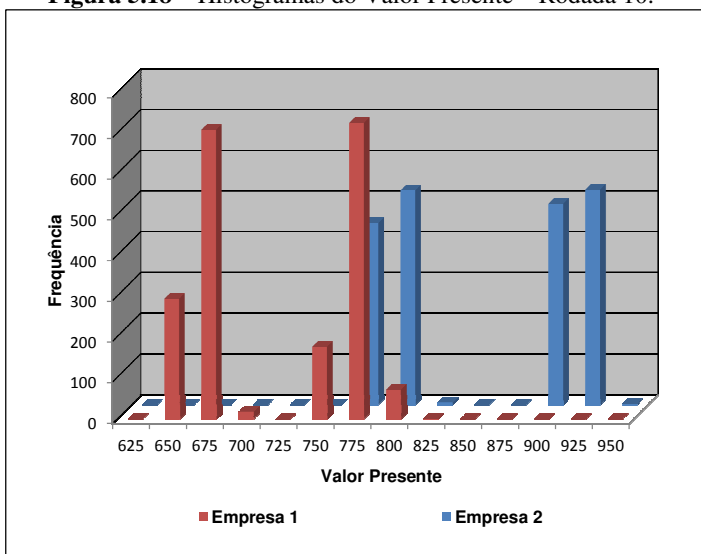
Fonte: elaborado pelo autor.

**Figura 5.17 – Histogramas do Valor Presente – Rodada 9.**



Fonte: elaborado pelo autor.

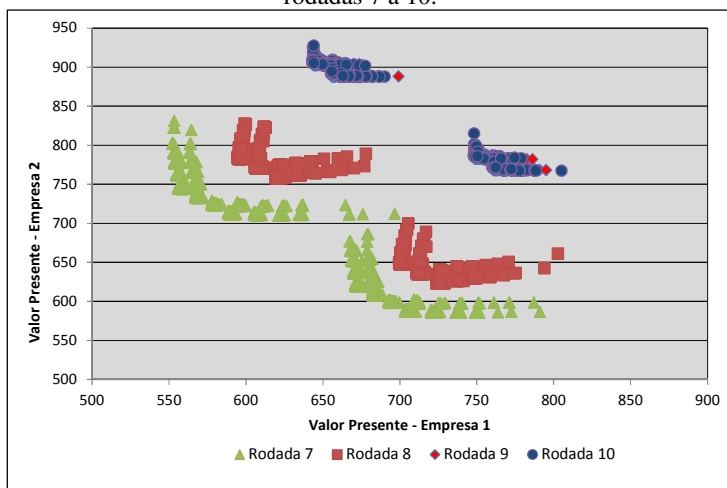
**Figura 5.18 – Histogramas do Valor Presente – Rodada 10.**



Fonte: elaborado pelo autor.

Esta situação torna-se bastante evidente quando analisamos o formato das curvas de dispersão do Valor Presente, conforme figura 5.19 a seguir. As rodadas 7 e 8, com custos de transportes ainda relativamente baixos, apresentam formatos equivalentes ao exemplo da rodada base, indicando que nestas rodadas as empresas ainda atendem aos dois mercados.

**Figura 5.19** – Gráficos de dispersão do Valor Presente rodadas 7 a 10.



Fonte: elaborado pelo autor.

Interessante notar, entretanto, que para as rodadas 9 e 10 as dispersões do Valor Presente são praticamente equivalentes e com formatos bastante distintos das rodadas 7 e 8. Isto sugere que os custos de transporte acima de um determinado valor não mais impactam os resultados. Ou seja, as empresas passam a apresentar desempenhos independentes, cada qual dominando o mercado no qual se localiza, caracterizando um monopólio para as empresas que atendem a cada um dos mercados.

#### 5.2.4.2. Assimetria na capacidade

Nesta seção o modelo é aplicado considerando-se que uma das empresas é uma entrante no mercado, com capacidade inicial zero, e a outra uma incumbente (já estabelecida no mercado), impondo-se, assim, uma assimetria de capacidades entre as empresas no início do horizonte de tempo observado. Testou-se o modelo com os dados da rodada 1 na qual as empresas são idênticas, porém, agora com diferenças em suas capacidades iniciais. Foram realizadas duas análises, considerando-se diferentes capacidades iniciais conforme o quadro 5.7.

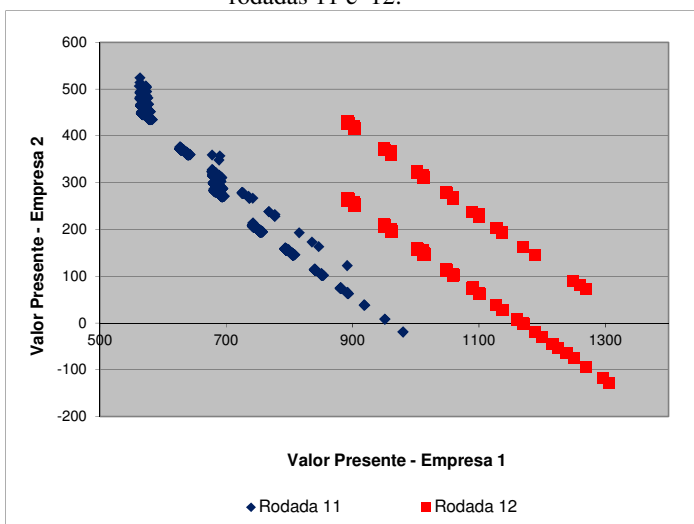
**Quadro 5.7** – Dados de Capacidades - rodadas 11 e 12.

		Empresa 1	Empresa 2
Rodada 11	Capacidade Inicial	10	0
Rodada 12	Capacidade Inicial	40	0

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.20 apresenta os gráficos de dispersão do Valor Presente resultantes das rodadas 11 e 12.

**Figura 5.20** – Gráficos de dispersão do Valor Presente – rodadas 11 e 12.



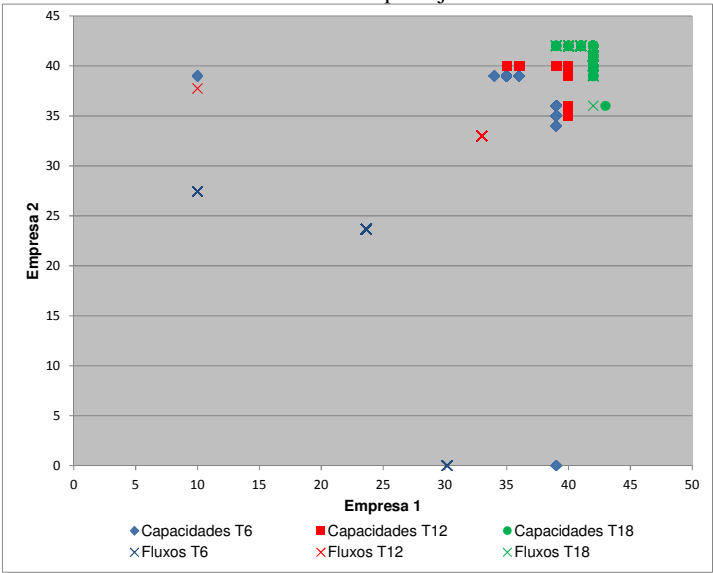
Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se pela figura 5.20 que na rodada 11 a empresa 1, que tem capacidade inicial de 10 unidades no início do período, tem realizações significativamente maiores que a empresa entrante com capacidade inicial zero. Quando a capacidade inicial da empresa 1 é ampliada para 40, no caso da rodada 12, esta obtém uma vantagem ainda maior em relação à empresa entrante. A empresa 2, neste exemplo, como se pode observar pela figura 5.20, apresenta resultados negativos para o Valor Presente em um número razoável de realizações em ambas

as rodadas. Interessante observar também, que as realizações do Valor Presente da empresa 2 são semelhantes para as rodadas 11 e 12, sugerindo que a partir de um determinado nível a capacidade da empresa 1 não mais impacta negativamente a empresa 2, fixada a demanda. De qualquer forma, o exemplo demonstra que a capacidade de produção de uma empresa incumbente funciona como uma barreira de entrada para empresas que desejam iniciar no mercado.

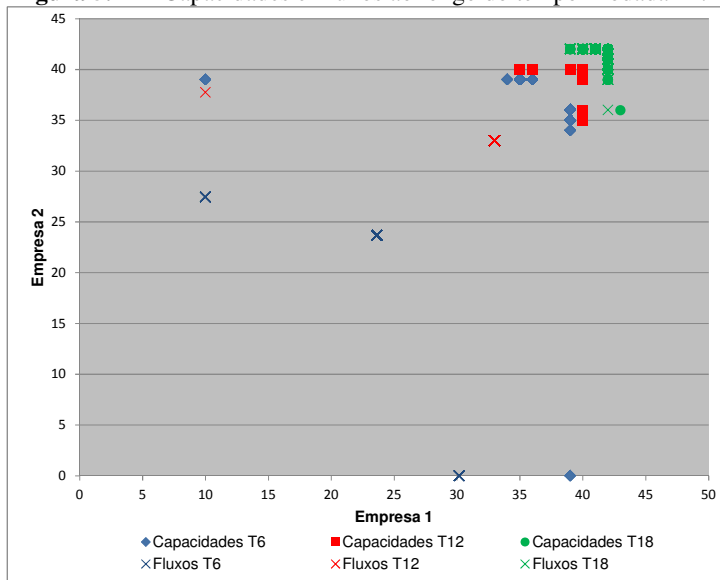
As figuras 5.21 e 5.22, a seguir, apresentam as capacidades e os fluxos de produção das empresas 1 e 2 resultantes das rodadas 11 e 12, respectivamente.

**Figura 5.21** – Gráfico de dispersão das Capacidades e Fluxos em três momentos do horizonte de planejamento - rodada 11.



Fonte: elaborado pelo autor.

**Figura 5.22 – Capacidades e Fluxos ao longo do tempo - rodada 12.**



Fonte: elaborado pelo autor.

Analisando-se primeiramente a figura 5.21, observa-se que as empresas ao longo do horizonte de planejamento operam em um nível de produção abaixo de sua capacidade máxima. Na medida em que a competição evolui, as empresas vão aumentando as suas produções, deixando-as próxima à sua capacidade máxima ao fim do horizonte analisado. Observa-se, ainda, pela figura 5.21 que as empresas 1 e 2 já operam no período 6 com capacidades bastante similares. Na verdade, como não há limites impostos ao tamanho da expansão, a empresa 2 já nos primeiros períodos do horizonte de planejamento realiza expansões de maior porte do que a empresa 1 com capacidade inicial maior, recuperando sua desvantagem, em termos de capacidade, relativamente à empresa 1.

Analisando-se a figura 5.22, rodada em que a empresa 1 inicia a competição com capacidade ainda maior que no exemplo anterior, verifica-se que esta praticamente não realiza expansões e opera abaixo de sua capacidade até quase o final do horizonte de planejamento. Este comportamento corrobora com a pressuposição que a empresa 1 toma partido de seu pleno domínio do mercado e oferta um volume menor de produto no mercado de forma a influenciar o preço e aumentar seus lucros.

É observado, também, pelas figuras 5.21 e 5.22 que a empresa 2 experimenta algumas realizações de valor zero para capacidade e para a produção ainda no período 6. Em uma análise mais detalhada da simulação da rodada 11, identificou-se que existem algumas realizações de valor zero para a produção da empresa 2 no período 6, mesmo esta já tendo expandindo a sua capacidade. Na rodada 12, o número de realizações de valor zero para a produção da empresa 2, no período 6, é ainda maior. Isto evidencia que a empresa entrante leva desvantagem na competição com a empresa já estabelecida (incumbente), pelo menos no curto e médio prazo, resultado que vem a corroborar com a situação de real de mercado.

Conforme mencionado anteriormente, ressalta-se que as empresas entrantes, dado que não há restrições de entrada, como por exemplo acesso ao crédito, vão adquirindo capacidade ao longo do tempo até quase em nível equivalente aos jogadores já bem estabelecidos. Esta situação não é diferente para casos reais, tal como, constatou-se com a entrada das empresas de telecomunicações no Brasil, em relação às empresas privatizadas. No processo de desregulamentação do setor, tais empresas foram adquirindo capacidade nas regiões em que podiam atuar, algumas vezes com tecnologia ainda mais avançada, igualando ou superando em competitividade as empresas incumbentes. Cabe ressaltar, porém, que no modelo proposto, por premissa, não é permitido a entrada de empresas no mercado ao longo do horizonte de planejamento.

#### 5.2.4.3. Assimetria na probabilidade de decidir

Conforme descrito na seção 4.3, assume-se neste modelo que empresas tomam decisões sequencialmente. Portanto, definiu-se uma variável aleatória  $\theta$  que representa a oportunidade da empresa  $i$  investir no tempo  $t$ . A distribuição de probabilidade desta variável são parâmetros de entrada do modelo. Uma probabilidade próxima de 1 em um determinado período indica que a empresa tem grande chance de investir naquele período. Pode-se interpretar uma probabilidade alta em investir como sendo uma competência da empresa em identificar as necessidades do mercado. Por outro lado, uma probabilidade próxima de zero indica que a empresa demora em detectar as necessidades do mercado e em tomar suas decisões de investimentos. Nesta seção o modelo será aplicado tendo em vista diferentes distribuições de probabilidades, caracterizando os diferentes comportamentos das empresas. Assumindo-se que uma alta probabilidade de investir de uma



empresa está associada a um comportamento agressivo e a uma maior atenção às demandas do mercado, o objetivo desta análise é identificar o quanto tais características influenciam positivamente em seus resultados. O quadro 5.8 apresenta as probabilidades consideradas para as rodadas 13 a 15.

**Quadro 5.8** – Dados de probabilidades de investir - rodadas 13 a 15.

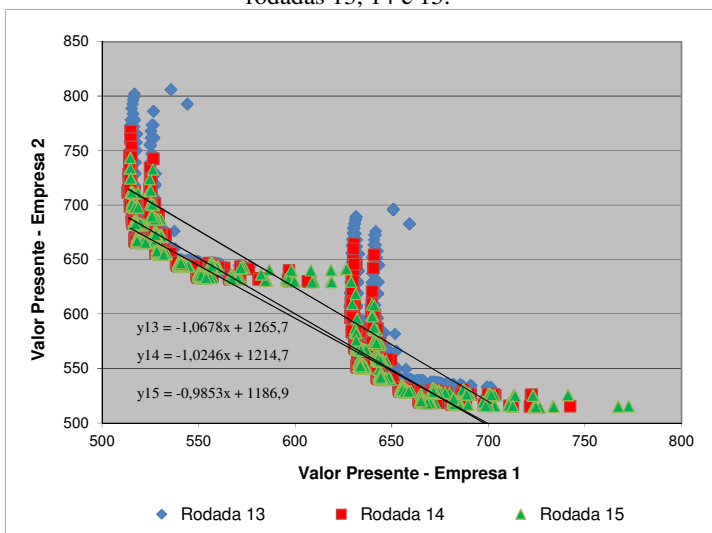
		Empresa 1	Empresa 2
<b>Rodada 13</b>	<b>Probabilidade de investir</b>	0,2000	0,8000
<b>Rodada 14</b>	<b>Probabilidade de investir</b>	0,4000	0,6000
<b>Rodada 15</b>	<b>Probabilidade de investir</b>	0,5000	0,5000

Fonte: elaborado pelo autor.

Testou-se o modelo com os dados da rodada base, porém, com diferença nas probabilidades de investir. A empresa 1 tem sua probabilidade aumentada progressivamente ao longo das rodadas 13 a 15, enquanto a probabilidade atribuída à empresa 2 decresce (a rodada 15 é idêntica à rodada base).

A figura 5.23 apresenta a dispersão do Valor Presente para tais rodadas. Constata-se que na rodada 13, a curva de dispersão mostra retornos da empresa 1 menores que os retornos da empresa 2. Na medida em que a probabilidade de investimento da empresa 1 aumenta, como assumido na rodada 14, os retornos da empresa 1 se tornam mais altos. Até que, na rodada 15, vê-se um equilíbrio dos retornos entre as empresas 1 e 2, já que nesta rodada as probabilidades são iguais. As retas de tendência para os respectivos os gráficos das rodadas 13, 14 e 15, apresentados na figura 5.23, ajudam a identificar tal situação.

**Figura 5.23** – Gráficos de dispersão do Valor Presente – rodadas 13, 14 e 15.

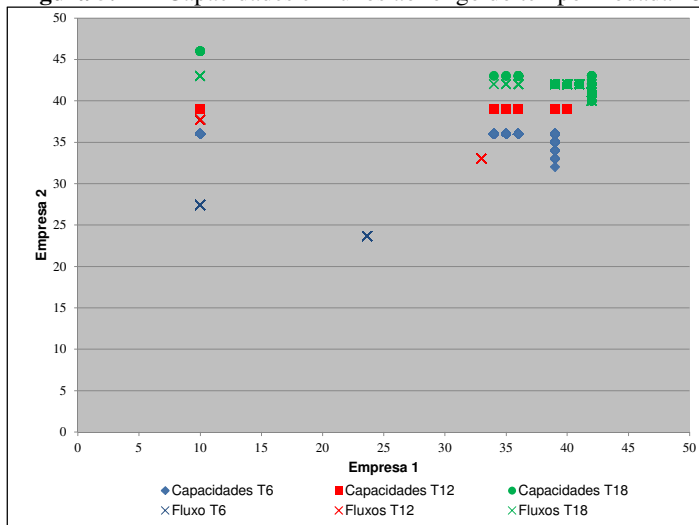


Fonte: elaborado pelo autor.

Apesar de não apresentado neste trabalho, os mesmos testes foram realizados variando as probabilidades da empresa 2 e resultados similares foram encontrados. Entretanto, neste caso é a empresa 2 que tem retornos crescentes na medida em que aumenta a probabilidade de investir.

Estes resultados sugerem que a empresa com maior probabilidade de investir, ou seja, mais atenta às necessidades do mercado, tende a levar vantagem sob a outra empresa. Este comportamento torna-se mais evidente observando-se a figura 5.24, a seguir, que apresenta as capacidades e os fluxos de produção das empresas 1 e 2 resultantes da rodada 13 para os períodos  $t=6$ ,  $t=12$  e  $t=18$ . Observa-se que os níveis de capacidade alcançados pela empresa 2, com maior probabilidade de investir, são para muitas das realizações da simulação significativamente superiores que os da empresa 1.

**Figura 5.24 – Capacidades e Fluxos ao longo do tempo - rodada 13.**



Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se que, como a demanda não é suficientemente alta, existe uma predisposição para que as empresas operem em níveis mais baixos que suas capacidades máximas nos períodos iniciais do horizonte de planejamento.

#### 5.2.4.4. Assimetria na economia de escala

Todas as aplicações do modelo até aqui apresentadas consideraram custos de investimentos sem economia de escala. Nesta seção o modelo será aplicado considerando que a empresa obtém economias de escala ao realizar o investimento em expansão de capacidade. O objetivo desta análise é observar como se comportam as empresas competindo em mercados distribuídos espacialmente quando estas têm distintas economias de escala para investimentos em expansão de capacidade.

O custo de investimento é calculado, conforme apresentado na seção 4.2, utilizando o fator de economia de escala,  $\alpha$ . Foram utilizados os mesmos dados da rodada base, variando-se o fator de economia de escala. A tabela 5.9 apresenta os valores utilizados de  $\alpha$ , para as rodadas 16, 17 e 18. O restante dos parâmetros foi aplicado conforme a rodada base.

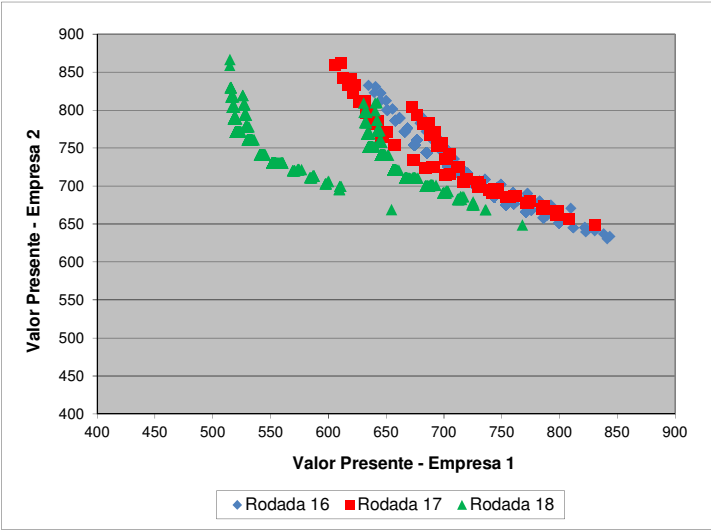
**Quadro 5.9** – Fatores de economia de escala - rodadas 16, 17 e 18.

		Empresa 1	Empresa 2
Rodada 16	Fator de economia de escala	0,6000	0,6000
Rodada 17	Fator de economia de escala	0,7000	0,5000
Rodada 18	Fator de economia de escala	1,0000	0,4000

Fonte: elaborado pelo autor.

As realizações do Valor Presente das empresas são apresentadas na figura 5.25.

**Figura 5.25** – Gráficos de dispersão do Valor Presente com economias de escala – rodadas 16, 17 e 18.



Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se na figura 5.25, que a empresa que apresenta maior economia de escala (menor valor para o fator), em relação a sua competidora, obtém resultados mais favoráveis. Na rodada 16 as empresas apresentam a mesma economia de escala. Na rodada 17 com um fator de economia de escala maior, a empresa 2 obtém vantagem sobre a empresa 1. Este fato fica evidenciado na rodada 18, onde a empresa 2, com forte economia de escala, obtém resultados

significativamente maiores que a empresa 1, a qual não apresenta economia de escala em seus investimentos. Estes resultados são consistentes com os resultados apresentados em Murto et al. (2004).

As expansões das empresas 1 e 2 em cada período de tempo, resultantes da rodada 18, são apresentadas no quadro 5.10.

Neste experimento as empresas iniciam o período observado de planejamento com capacidade de 10 unidades. A empresa 1, porém, sem economia de escala realiza vários investimentos de pequeno porte ao longo do horizonte de planejamento. Por sua vez, a empresa 2, com alta economia de escala, investe apenas um vez, no período  $t=0$ .

Considerando-se que a demanda não é alta o suficiente no início do horizonte de planejamento, a empresa 2 tira proveito de sua economia de escala e, com expansões de maior porte, obtém lucros maiores que a empresa 1. Na medida em que o tempo passa, porém, a empresa 1, que realiza expansões menores, é mais hábil em aumentar sua capacidade em linha com o crescimento da demanda, reduzindo excesso de capacidade. Verifica-se pela última coluna do quadro 5.10, que a empresa 1, inicia o período observado com uma desvantagem de 5,4% sobre a empresa 2 em termos do valor presente de seu fluxo de caixa. Porém, no último período de planejamento a empresa 1 praticamente anula esta desvantagem, corroborando com os resultados apresentados na rodada 12, que considera a assimetria de capacidade inicial entre as empresas.

Ressalta-se que este plano não representa necessariamente as decisões ótimas de expansão porque é resultante de apenas uma das inúmeras possíveis realizações da variável estocástica que governa o sequenciamento de investimento,  $\theta_i$ . Apesar disso, tais expansões são um indicativo do comportamento de uma empresa que apresenta ganhos de escala.

**Quadro 5.10 – Plano de expansão e valor presente esperado das empresas 1 e 2, para uma das seqüências possíveis de investimentos.**

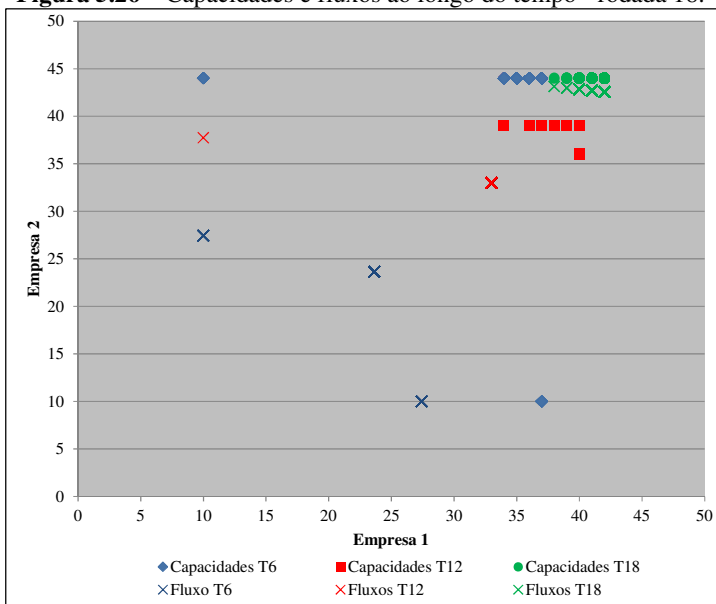
Período	Capacidade Empresa 1	Capacidade Empresa 2	Expansão Empresa 1	Expansão Empresa 2	Fluxo Empresa 1	Fluxo Empresa 2	Valor Presente (VP) Esperado Empresa 1	Valor Presente (VP) Esperado Empresa 2	Diferença % entre o VP da Empresa 1 sobre o VP da Empresa 2
0	10	10	23	33	10,0	10,0	1.141	1.203	5,4%
1	33	43	1	0	16,9	16,9	1.548	1.578	1,9%
2	34	43	0	0	18,2	18,2	1.631	1.658	1,7%
3	34	43	1	0	19,5	19,5	1.708	1.738	1,8%
4	35	43	1	0	20,8	20,8	1.792	1.819	1,5%
5	36	43	0	0	22,2	22,2	1.875	1.899	1,3%
6	36	43	1	0	23,6	23,6	1.951	1.978	1,4%
7	37	43	1	0	25,1	25,1	2.032	2.055	1,2%
8	38	43	0	0	26,6	26,6	2.110	2.130	1,0%
9	38	43	1	0	28,2	28,2	2.180	2.202	1,0%
10	39	43	0	0	29,8	29,8	2.251	2.270	0,8%
11	39	43	1	0	31,4	31,4	2.312	2.333	0,9%
12	40	43	0	0	32,4	32,4	2.373	2.390	0,7%
13	40	43	0	0	34,6	34,6	2.421	2.441	0,8%
14	40	43	1	0	36,2	36,2	2.462	2.484	0,9%
15	41	43	0	0	37,8	37,8	2.499	2.517	0,7%
16	41	43	0	0	39,4	39,4	2.519	2.540	0,8%
17	41	43	1	0	40,9	40,9	2.529	2.554	1,0%
18	42	43	0	0	42,0	43	2.530	2.548	0,7%
19	42	43	0	0	42,0	43	2.512	2.531	0,7%

Fonte: elaborado pelo autor.

A figura 5.26 apresenta as capacidades e os fluxos nos períodos  $t=6$ ,  $t=12$  e  $t=18$  para 2000 realizações da variável estocástica  $\theta_i$  de sequenciamento dos investimentos.

Observa-se pelos gráficos de dispersão da figura 5.26 que a empresa 2 opera todo o tempo bem abaixo de sua capacidade de produção, a qual tem dois nítidos patamares: o primeiro, no início do horizonte em torno de 39 unidades e o segundo, a partir da metade do horizonte de planejamento em diante, em torno de 44 unidades. Por sua vez, a empresa 1, sem economia de escala, apresenta várias realizações de capacidade de produção variando em torno de 10 no início do horizonte de planejamento a 42 nos últimos períodos e operando quase sempre em sua capacidade máxima.

**Figura 5.26 – Capacidades e fluxos ao longo do tempo - rodada 18.**



Fonte: elaborado pelo autor.

Verifica-se, também, pelos gráficos de dispersão dos fluxos e capacidades da figura 5.26, que a empresa 2 tende a operar abaixo de sua capacidade ao longo de todo o horizonte de planejamento, como consequência da forte economia de escala que apresenta em relação à empresa 1.

### 5.2.5. Oligopólio com mais produtores

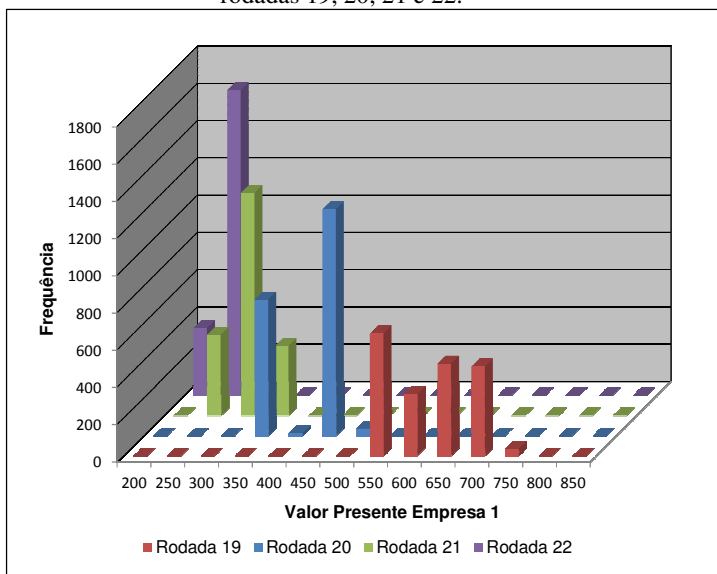
Nos exemplos analisados nas seções anteriores considerou-se sempre um duopólio. Nesta seção estende-se a aplicação do modelo para oligopólios de 3, 4 e 5 empresas. O objetivo desta seção é verificar o crescimento do tempo computacional para execução do sistema e analisar o efeito do aumento do número de competidores no mercado.

Portanto, nas rodadas 19, 20, 21 e 22, o modelo é aplicado para 2, 3, 4 e 5 produtores, respectivamente. Para fins de otimização do tempo computacional, a capacidade máxima de cada produtor, em cada uma das rodadas, foi estabelecida de modo que a capacidade máxima do mercado fosse sempre aproximadamente 90 unidades. Dado que a demanda total do mercado permanece a mesma para todas as rodadas,

esta premissa não impacta na qualidade dos resultados, prestando apenas para eliminar os estados não necessários nas rodadas com mais empresas. Desta forma, nas rodadas 19, 20, 21 e 22 foram adotadas as capacidades máximas das empresas 1, 2, 3, 4 e 5 de 45, 30, 22 e 18, respectivamente. Adotou-se a mesma capacidade inicial para todas as empresas em todas as rodadas de 10 unidades. Assumiu-se que as empresas são simétricas, tendo os mesmos custos de produção e de transportes. A demanda nos mercados consumidores e demais parâmetros são os mesmos da rodada base. As empresas têm probabilidades de investimento equivalentes e um fator de economia de escala de 1,000, em todas as rodadas.

Os histogramas da empresa 1, para cada uma das rodadas, são apresentados na figura 5.27.

**Figura 5.27** – Histogramas do Valor Presente da empresa 1 – rodadas 19, 20, 21 e 22.



Fonte: elaborado pelo autor.

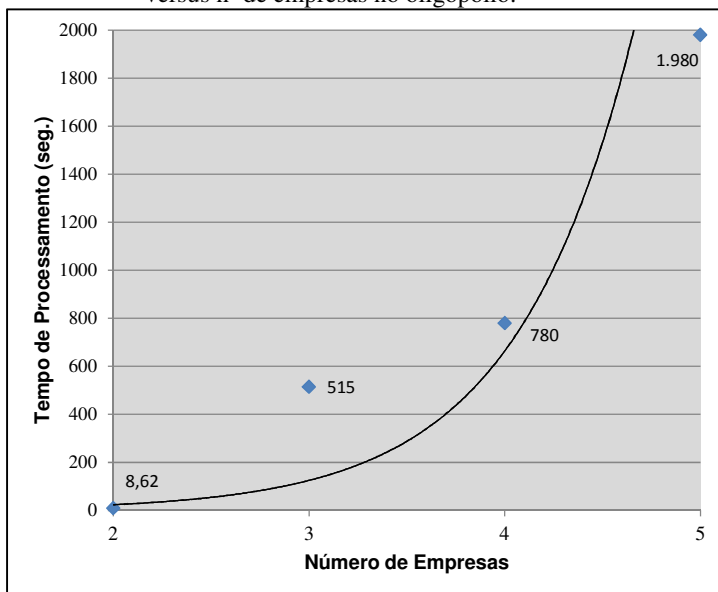
Observa-se pela figura 5.27 que na medida em que aumenta o número de empresas do mercado, as realizações dos retornos (Valor Presente) das empresas decrescem, em função da maior competitividade, implicando que o lucro da indústria, em cada rodada, tende também a decrescer. A empresa 1 teve seu lucro médio reduzido em 34% na



rodada 20 em relação à rodada 19. Na rodada 21 a redução foi de 53%, e na rodada 22 a redução foi de 65%, em relação à rodada 19.

Em termos de tempo computacional, verificou-se um crescimento significativo com o aumento do número de empresas, conforme pode ser percebido pelo gráfico da figura 5.28. O gráfico plota os tempos de processamento para as referidas rodadas, com 2, 3, 4 e 5 empresas, e apresenta uma linha de tendência exponencial para a curva dos tempos de processamento versus número de empresas consideradas.

**Figura 5.28** – Crescimento do tempo computacional (em segundos) versus nº de empresas no oligopólio.



Fonte: elaborado pelo autor.

Este crescimento do tempo de processamento pode ser explicado pelo aumento do número de estados de forma significativa na medida em que aumenta o número de empresas consideradas no oligopólio. O espaço de estados do modelo em questão depende diretamente dos seguintes parâmetros:

- (i) o número de empresas;
- (ii) a capacidade inicial;
- (iii) e a capacidade máxima permitida.

O quadro 5.11 mostra, para este exemplo, o crescimento do número de estados para casos com 2, 3 4 e 5 empresas produtoras, quando mantidos os outros parâmetros constantes. Conforme mencionado anteriormente, o espaço de estados do modelo, para rodadas com maior número de empresas, foi reduzido com a adoção de capacidades máximas distintas entre as rodadas.

**Quadro 5.11** – crescimento do espaço de estados do modelo.

Rodada	Nº de empresas	Capacidade Inicial	Capacidade máxima	Número de estados
19	2	10	45	1.296
20	3	10	30	9.261
21	4	10	22	28.561
22	5	10	18	59.049

Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se pelo quadro 5.11, que a rodada 22 com cinco produtores, mesmo com uma capacidade máxima menor, tem um número de estados 45 vezes maior que na rodada 19, com 2 produtores. Como ilustração, se aumentássemos a capacidade máxima da rodada 22 de 18 para 22 unidades o número de estados desta rodada passaria de 59.049 para 161.051, justificando assim, o crescimento do tempo computacional apresentado na figura 5.28.

Observou-se, no entanto, que os resultados qualitativos para os exemplos de oligopólios não diferem de forma significativa dos resultados do exemplo de duopólio analisado nas seções anteriores, apesar do lucro total da indústria ter sido reduzido, conforme comentado anteriormente. As empresas tendem a expandir ao máximo a sua capacidade logo no início do horizonte de planejamento por razões estratégicas, de forma a garantir a sua participação no mercado. Observou-se em análise mais detalhada dos resultados da simulação para a rodada 21, com 4 empresas, que em realizações em que a empresa 1 não é agressiva ao expandir sua capacidade no início do horizonte de planejamento, esta teve os seus respectivos retornos bem menores comparativamente à de outras empresas, sugerindo que

empresas que investem estrategicamente, mesmo ainda com a demanda relativamente baixa, garantem sua participação no mercado e ganham uma vantagem competitiva duradoura.

Neste capítulo, o funcionamento do modelo proposto foi ilustrado aplicando-o a um exemplo numérico teórico. Diferentes configurações de parâmetros foram testadas e analisadas. O objetivo desta análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo foi explorar o comportamento das empresas diante de diferentes cenários. Não obstante a limitação do estudo, visto que o modelo não foi aplicado a um estudo de caso real, o resultado desta análise traz uma série de conclusões qualitativas.



## 6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 6.1. CONCLUSÕES

Na revisão bibliográfica deste estudo verificou-se que desde os anos 50 têm sido empregadas várias técnicas de solução para o problema de expansão de capacidades. A evolução recente da literatura neste campo, porém, tem sido no sentido de se considerar o efeito das decisões das empresas sobre as dos seus concorrentes, obtendo-se o equilíbrio do mercado para identificar a política ótima de expansão ao longo do tempo. Neste contexto, técnicas como jogos de opção, que unem as teorias de opções reais e teoria dos jogos têm sido aplicadas em muitos estudos recentes de expansão de capacidades. Nenhum desses estudos pesquisados nesta tese, porém, consideram uma estrutura espacial de mercado tal como no modelo proposto neste trabalho para a análise do problema de expansão de capacidade.

O objetivo principal desta tese foi apresentar uma proposta de modelo para determinar a estratégia ótima de expansão de capacidade de empresas produtoras de commodities. Considerou-se que produtores e consumidores podem estar separados espacialmente entre si e, portanto, as empresas incorrem em custos logísticos para o envio da produção, em regime CIF. O fator diferencial do presente estudo, portanto, resultou da necessidade de se propor um modelo que pudesse considerar os efeitos dos custos logísticos na determinação da estratégia ótima de expansão de capacidade e tratar diferentes estruturas competitivas de mercados, tais como, oligopólio, mercado perfeitamente competitivo e monopólio. Para obtenção da solução ótima do modelo foi proposta a união de várias técnicas disponíveis na literatura.

A metodologia de solução do modelo aborda o problema em duas fases distintas a cada período de tempo.

Na primeira fase, cada empresa tem diante de si várias opções de porte de investimentos e uma escolha a ser feita de forma a maximizar o seu fluxo de caixa no longo prazo. As empresas competem por capacidade ao longo do tempo e o resultado deste jogo chamou-se de equilíbrio de longo prazo. Assume-se no modelo que em cada período de tempo uma única empresa pode investir e esta sequência é governada por uma variável estocástica. O conceito do *Equilíbrio Perfeito de Markov (EPM)* foi aplicado para se obter a estratégia de investimento das empresas e uma solução única de equilíbrio foi garantida em função do sequenciamento de investimentos. A solução ótima do jogo de longo

prazo é a solução de um problema de *Programação Dinâmica*, que resulta em um *Equilíbrio de Nash Perfeito de Markov*.

Na segunda fase, fixadas as capacidades de cada empresa, a competição volta-se para determinar-se o nível de produção e as quantidades transportadas para os mercados consumidores, distribuídos espacialmente, e o resultado deste jogo chamou-se de equilíbrio de curto prazo. O conceito de *Equilíbrio Espacial de Mercados* foi aplicado para determinar a produção ótima das empresas e seus fluxos para os mercados consumidores. O jogo de curto prazo foi formulado como um *Problema de Inequações Variacionais*. Para ilustrar a aplicação do modelo foi utilizado um exemplo de duas empresas e dois mercados consumidores, distribuídos espacialmente, que comercializam um produto homogêneo da indústria, considerado uma *commodity*, com uma demanda que cresce anualmente a uma taxa constante. A aplicação do modelo ao mercado de *commodities* se justifica em função da relevância que têm os custos logísticos neste tipo de indústria em relação aos custos de produção. Embora o modelo não tenha sido aplicado a uma situação real, o exemplo numérico utilizado permitiu analisar uma série de comportamentos qualitativos de empresas inseridas neste tipo de mercado.

A análise comparativa do desempenho do modelo em relação ao modelo de Murto et al. (2004) não foi possível em função da adoção de distintas premissas e configurações de mercado entre o modelo proposto e o modelo do referido autor. No entanto, os resultados do presente trabalho se mostraram consistentes com as conclusões de Murto et al. (2004).

O principal mérito do modelo proposto está na incorporação ao modelo dos custos logísticos na determinação da política ótima de expansão de capacidade. A formulação do problema do equilíbrio de curto prazo como um problema de Inequação Variacional (VIP) permitiu, ainda, a generalização do modelo para mercados competitivos e oligopolizados.

Verificou-se que as distâncias entre os mercados e os consequentes custos de transportes influenciam sensivelmente a estratégia de investimentos, evidenciando que o problema da localização da produção é uma questão fundamental na estratégia de expansão de capacidade, com impacto significativo no retorno financeiro das empresas.

Foi ilustrado nos exemplos que os custos logísticos criam barreiras reais para produtores localizados a partir de uma determinada

distância dos mercados consumidores, eventualmente criando um monopólio para um competidor mais próximo de tais mercados.

Destaca-se que o modelo aqui proposto, diferentemente dos modelos pesquisados na revisão bibliográfica deste estudo, permite captar a flexibilidade das empresas em operar a níveis de produção abaixo de sua capacidade de forma a influenciar no preço dos mercados que atendem. Demonstrou-se, também, que empresas com maior probabilidade de investir tendem a obter os maiores retornos, sugerindo que decisores mais atentos às demandas de mercado ganham vantagem competitiva no jogo de longo prazo por capacidade.

A aplicação do modelo para diferentes parâmetros permitiu analisar vários comportamentos qualitativos da competição entre as empresas, como foi visto no capítulo 5. Porém, na análise dos resultados, algumas limitações do modelo devem ser observadas, conforme mencionadas a seguir.

O modelo não foi aplicado a um estudo de caso real. Limitou-se a um exemplo teórico e muitas das questões subjetivas não foram levadas em consideração no processo decisório de expansão de capacidade, tais como, segurança de transporte, ação de sindicalistas, aspectos político-econômicos e ambientais. Tais variáveis, ao se considerar na modelagem do problema, devem permitir uma maior aderência do modelo a uma situação real e possivelmente alterar as políticas de expansão das empresas.

Ressalta-se também que a função utilidade adotada no modelo para determinação da estratégia ótima é a do valor esperado do valor presente no início do horizonte de planejamento, assumindo-se, portanto, que o decisor tem uma atitude neutra com relação ao risco. Caso o decisor não tenha tal comportamento, de neutralidade ao risco, a regra do valor esperado não deve ser aplicada, pois, segundo tal regra as diferenças individuais de risco e o valor subjetivo dos resultados não são levados em consideração e qualquer decisor deve tomar a mesma decisão.

Ainda com relação às limitações do estudo, evidenciou-se que a capacidade inicial de uma empresa incumbente funciona como uma barreira de entrada para outros competidores. Porém, a questão de restrição ao crédito não foi tratada no modelo. Assim sendo, foi observada nos resultados do modelo uma tendência de uma empresa entrante, no longo prazo, reduzir ou dissipar a sua desvantagem sobre a empresa já estabelecida ao se permitir, sem limites, as expansões de grande porte. Estas expansões ocorrem já no início do período observado e são de grande porte quando se assume um fator de

economia de escala relativamente alto para os investimentos das empresas. Ainda em relação a entrantes, o modelo assume a premissa que existe um número fixo de empresas ao longo de todo o horizonte de planejamento, não permitindo a entrada de novos competidores ao longo do tempo. Considerou-se na modelagem do problema que os decisores agem de uma forma otimista, ou seja, ao investir a empresa assume que o competidor não investirá. Muito embora esta condição possa induzir a um erro de excesso de capacidade, tais situações podem ser remediadas através da limitação da produção. Este comportamento, demonstrado nos exemplos apresentados no capítulo 5, influenciam o preço para cima, fazendo com que os custos referentes aos excessos de capacidades sejam na sua totalidade, ou em parte, compensados ao longo dos anos.

Assumiu-se também que a demanda do mercado em questão é determinística. Muitos dos modelos encontrados na literatura, entretanto, consideram a demanda como estocástica. A inclusão da incerteza da demanda deve alterar as políticas de expansão e permitir uma aplicação do modelo a um gama maior de mercados. Muito embora, considera-se que seja razoável a premissa de demanda determinística em mercados de commodities, conforme justificado no capítulo 4.

As inúmeras possibilidades de investimentos a cada período, no modelo proposto, podem ser vistas como um portfólio de opções reais. As empresas têm uma escolha a fazer a cada período e uma delas é de não investir e esperar. No contexto da teoria de opções reais, entretanto, não foram abordadas outras opções tais como reduzir capacidade, adquirir empresas, ou mesmo abandonar o empreendimento. A formulação do problema, no entanto, pode ser reestruturada de forma a considerar tais opções. A inclusão dessas opções deve fornecer um maior leque de estratégias de expansão, alterar os retornos das empresas e deve ser analisada em um cenário de incerteza da demanda.

## 6.2. RECOMENDAÇÕES

Na aplicação do modelo proposto nesta tese foi utilizado um exemplo numérico teórico. Os valores dos parâmetros do modelo foram baseados em exemplos da literatura e ajustados por análises de sensibilidade. Em vista disso, recomenda-se aplicar o modelo a um estudo de caso, de forma que os parâmetros utilizados possam se basear em medidas reais e que algumas das premissas adotadas, tais como o sequenciamento de investimentos ou o fator de crescimento da demanda, possam ser validadas através de resultados históricos de um mercado



real. A presente modelagem não teve a pretensão de considerar todos os possíveis fatores que possam influenciar na estratégia de expansão de capacidade das empresas. Tais fatores podem, no entanto, serem incorporadas ao modelo dependendo do mercado em questão. Desta forma, ao aplicar o modelo em uma situação real, recomenda-se que seja analisada a possibilidade de se considerar: (a) a restrição ao crédito para o investimento das empresas, eventualmente correlacionada ao seu porte. Tal restrição pode funcionar como uma barreira para entrantes no mercado e alterar de forma significativa a política ótima de expansão dos incumbentes; (b) a possibilidade de se considerar no modelo a entrada de competidores ao longo do horizonte de planejamento e, portanto, não se manter fixo artificialmente o número de empresas. Neste caso, dado o exemplo base deste capítulo, uma terceira empresa com zero de capacidade instalada somente entraria no mercado se os lucros resultantes da competição Cournot-Nash de curto prazo (os quais seriam impactados pela entrante) excedessem os custos de investimento, conforme destacado em Garcia e Shen (2010); (c) a incorporação de variáveis subjetivas, tais como, a segurança de transporte, as políticas econômicas e ambientais nas regiões produtoras, assim como, os possíveis riscos de ações de sindicatos. Algumas dessas variáveis podem ser incorporadas nas funções de custos de produção e de transporte; (d) empresas de mesmo grupo econômico atuando no mercado e cooperando entre si. Quando duas empresas cooperam entre si há de se considerar o fluxo agregado das duas empresas destinado a um mercado consumidor para a obtenção do equilíbrio deste mercado. Esta situação conduz a uma política de expansão distinta daquela em que não se consideram a cooperação entre as empresas. Cabe notar, porém, que embora nos parâmetros adotados no modelo proposto tenha-se considerado que todas as empresas são concorrentes entre si, o programa de computador elaborado para a solução do problema desta tese já está preparado para atender a esta possível situação; (e) e a demanda estocástica em detrimento da demanda determinística adotada neste modelo.

Sob a perspectiva da teoria normativa da decisão, pode-se, ainda, em um cenário de incerteza da demanda, substituir o valor esperado do valor presente do lucro das empresas no início do horizonte de planejamento por uma função de utilidade que leve em consideração a atitude do decisor em relação ao risco. No presente trabalho tem-se como premissa que o decisor é neutro ao risco e, desta forma, a regra do valor esperado pode ser considerada adequada. No entanto, quando a aversão ou propensão ao risco do agente decisor estiver presente no

processo de tomada de decisão uma função utilidade que leve em conta as preferências do decisor diante das alternativas disponíveis deve ser determinada conforme a teoria de utilidade de Von Newmann-Morgenstern<sup>24</sup>.

Recomenda-se, também, que a componente incerteza da demanda, caso adotada, seja atrelada a uma análise mais abrangente das opções reais do problema de expansão de capacidade. Como visto, o modelo atual considera implicitamente as opções de investir ou esperar, porém, não considera outras opções reais que podem ser inerentes a cada caso específico de aplicação do modelo. Quando existem flexibilidades gerenciais de esperar, abandonar ou reduzir a capacidade de um projeto, o método das opções reais pode obter valores significativamente distintos do método do fluxo de caixa descontado adotado nesta pesquisa. Alguns estudos têm demonstrado que a regra de opções reais é superior a regra do método do valor presente, especialmente em projetos ou decisões ligeiramente atrativas, ou seja, com o VPL positivo, porém próximo de zero (Dias, 2005).

Finalmente, sugere-se que o modelo seja adaptado para considerar um horizonte de planejamento rolante, ou seja, a cada ano renova-se o período de 20 anos à frente e obtém-se a estratégia ótima para o ano atual. Como observado no capítulo 4, é aceitável que se o horizonte de planejamento seja longo o suficiente, a decisão ótima do início do planejamento com horizonte finito esteja alinhada com a decisão inicial ótima do planejamento de horizonte infinito.

---

<sup>24</sup> Para um maior detalhamento sobre a teoria da utilidade de Newmann e Morgenstern ver Fries (2009) e Newmann e Morgenstern (1944, apud Cusinato, 2003).

## REFERÊNCIAS

- AGUERREVERE, F. L. (2003), 'Equilibrium Investment Strategies and Output Price Behaviour: A Real Options Approach', *The Review of Financial Studies* 16(4), 1239-1272.
- AHMED, S.; KING, A. J. & PARIJA, G. (2002), 'A Multi-Stage Stochastic Integer Programming Approach for Capacity Expansion under Uncertainty', *Technical report, Netherlands: Kluwer Academic Publishers ceuu.tex*.
- ALBUQUERQUE, J. (2008), 'Probabilidade, variáveis aleatórias e processos estocásticos', Rio de Janeiro: Interciência: PUC Rio.
- ANDRADE, E. (2004), 'Introdução à Pesquisa Operacional', Rio de Janeiro: LTC.
- ANGELUS, A. & PORTEUS, E. L. (2002), 'Simultaneous capacity and production management of short-life-cycle, produce-to-stock goods under stochastic demand', *Management Science* 48, 399-413.
- ATAMTÜRK, A. & HOCHBAUM, D. (2001), 'Capacity acquisition, subcontracting, and lot sizing', *Management Science* 47(8), 1081-1100.
- BALDURSSON, F. M. (1998), 'Irreversible Investment under Uncertainty in Oligopoly', *Journal of Economic Dynamics and Control* 22, 627-644.
- BALDURSSON, F. & KARATZAS, I. (1997), 'Irreversible investment and industry equilibrium', *Finance and Stochast* 1, 69-89.
- BAR-ILAN, A. & STRANGE, W. C. (1996), 'Investment lags', *American Economic Review* 86, 610-622.
- BARAHONA, F.; BERMON, S.; GÜNLÜK, O. & HOOD, S. (2005), 'Robust Capacity Planning in Semiconductor Manufacturing', Technical report, IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY 10598 and IBM Microelectronics Division.
- BEAN, J.; HIGLE, J. & SMITH, R. (1992), 'Capacity Expansion Under Stochastic Demands', *Operations Research* 40(2), S210-S216.

BEAN, J. & SMITH, R. (1985), 'Optimal capacity expansion over an infinite horizon', *Management Science* 31(12), 1523-1532.

BELLMAN, R. S. (1957), 'Dynamic Programming'. Princeton University Press, Princeton.

BESSIÈRE, F. (1970), 'The Investment 85 Model of Electricite de France', *Man* 17, B192-B211.

BHATNAGAR, S.; FERNÁNDEZ-GAUCHERAND, E.; FU, M.; HE, Y. & MARCUS, S. (1999), 'A Markov Decision Process Model for Capacity Expansion and Allocation', Technical report, Institute for Systems Research, University of Maryland University of Maryland College Park, MD 20742.

BIRGE, J. (2000), 'Option methods for incorporating risk into linear capacity planning models', *Manufacturing & Service Operations Management* 2(1), 19-31.

BRADLEY, J. & ARNTZEN, B. (1999), 'The simultaneous planning of production, capacity and inventory in seasonal demand environments', *Operations Research* 47(6), 795-806.

BRANCO, R. M.; BATISTUS, D.R.; MAYERLE, S.F.; COELHO, A.S. (2009), 'Solução de Inequações variacionais aplicadas ao equilíbrio espacial de preços Cournot-Nash com algoritmo do extragradiente', *V Encontro Mineiro de Engenharia de Produção, EMEPRO 2009*.

BUSHNELL, J. & ISHII, J. (2007), 'An Equilibrium Model of Investment in Restructured Electricity Markets', Technical report, Center for the Study of Energy Markets (CSEM) WP, University of California Energy Institute.

CACHON, G. & LARIVIERE, M. (1999), 'Capacity Choice and Allocation: Strategic Behaviour and Supply Chain Performance', *Management Science* 45(8), 1091-1108.

CHENERY, H. B. (1952), 'The Theory of Capital and Its Time-Measures', *Econometrica* January.

CHEVALIER-ROIGNANT, B., FLATH, C., HUCHZERMEIER, A., TRIGEORGIS L (2011)., 'Strategic investment under uncertainty: A synthesis', *European Journal of Operational Research* 215, 639-650.

COHEN, M. & HUCHZERMEIER, A. (1998), 'Global Supply Chain Management: A Survey of Research and Applications', *International Series in Operations Research & Management Science*, 17, 669-702.

COPELAND, T. & ANTIKAROV, V. Campus, E., ed. (2001), 'Opções Reais: Um Novo Paradigma Para Reinventar a Avaliação de Investimentos', São Paulo: Editora Campus.

CUSINATO, R. (2003), 'Teoria da Decisão sob Incerteza e a hipótese da utilidade esperada: conceitos analíticos e paradoxos', Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

DAMADORAN, A. (2004), 'Finanças Corporativas: teoria e prática', São Paulo: Bookman.

DANGL, T. (1999), 'Investment and capacity choice under uncertain demand', *European Journal of Operational Research* 117, 415-428.

DAVIS, M. H. A.; DEMPSTER, M. A. H.; SETHI, S. & VERMES, D. (1987), 'Optimal Capacity Expansion under Uncertainty', *Advances in Applied Probability* 19(1), 156-176.

DIAS, M.A.G. (2005), 'Opções Reais Híbridas com Aplicações em Petróleo', Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

DIAS, J.; CAPTIVO, M. C. J. (2001), 'Dynamic Location Problems with Discrete Expansion and Reduction Sizes of Available Capacities', Technical report, Faculdade de Economia e INESC-Coimbra.

DIXIT, A. (1989), 'Entry and Exit Decisions under Uncertainty', *Journal of Political Economy* 97(3), 620-638.

DIXIT, A. (1991), 'Irreversible Investment with Price Ceilings', *Journal of Political Economy* 99(3), 541-557.

DIXIT, A. & PINDYCK, R. S. (1994), *Investment Under Uncertainty*,

New Jersey: Princeton University Press.

EBERLY, J. C. & MIEGHEM, J. A. (1997), 'Multi-factor Dynamic Investment under Uncertainty', *Journal of Economic Theory* 75, 345-387.

ENKE, S. (1951), 'Equilibrium among spatially separated markets: solution by electronic analogue', *Econometrica* 10, 40-47.

EPPEN, G. D.; MARTIN, R. K. & SCHRAGE, L. (1989), 'A scenario approach to capacity planning', *Operations Research* 37, 517-527.

ERLENKOTTER, D. (1967), 'Two production areas - dynamic programming solutions. In Investments for Capacity Expansion: Size, Location and Time-Phasing', Cambridge, MA: MIT Press.

ERLENKOTTER, D. (1974), 'A Dynamic Programming Approach to Capacity Expansion With Specialization', *Management Science* 22, 274-285.

ERLENKOTTER, D. (1975), 'Capacity Planning for Large Multilocation Systems: Approximate and Incomplete Dynamic Programming Approaches', *Management Science* 22(3), 274-285.

ERLENKOTTER, D.; SETHI, S. & OKADA, N. (1989), 'Planning for Surprise: Water Resources Development under Demand and Supply Uncertainty I. the General Model', *Management Science* 35(2), 149-162.

ESCUDERO, L. F. & KAMESAM, P.V. KING, A. W. R. (1993), 'Production planning via scenario modeling', *Annals of Operations Research* 43, 311-355.

FONG, C. & SRINIVASAN, V. (1986), 'The Multiregion Dynamic Capacity Expansion Problem: an Improved Heuristic', *Management Science* 32(9), 1140-1152.

FREIDENFELDS, J. (1980), 'Capacity Expansion when Demand is a Birth-Death Random Process', *Operations Research* 28(3).

FREINDENFELDS, J. (1981), 'Near-Optimal Solution of a Two-Type Capacity Expansion Problem', *Computers & Operations Research* 8,

221-239.

FREIDENFELDS, J. & McLAUGHLIN, C. (1979), 'A Heuristic Branch-and-Bound Algorithm for Telephone Feeder Capacity Expansion', *Operations Research* 27, 567-582.

FRIES, C.E.; (2009), 'Teoria da Decisão', Notas de aula, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas.

FRIES, S.; MILLER, M. & PERRAUDIN, W. (1997), 'Debt in industry equilibrium', *Review of Financial Studies* 10(1), 39-67.

FUDENBERG, D. & TIROLE, J. (1991), 'Game Theory', Cambridge, MA: MIT Press.

GARCIA, A. & SHEN, Z. (2010), 'Equilibrium Capacity Expansion Under Stochastic Demand Growth', *Operations Research* 58(1), 30-42.

GARDNER, D. & ROGERS, J. (1999), 'Planning Electric Power Systems Under Demand Uncertainty with Different Technology Lead Times', *Management Science* 45(10), 1289-1306.

GARVIN, M. (2005), 'Real Options Analysis: Can It Improve Infrastructure Development Decisions?', Construction Research Congress 2005.

GENG, N.; JIANG, Z. & CHEN, F. (2009), 'Stochastic programming based capacity planning for semiconductor wafer fab with uncertain demand and capacity', *European Journal of Operational Research* 198, 899-908.

GHEMAWAT, P. & NALEBUFF, B. (1985), 'Exit', *Rand Journal of Economics* 16(2), 184-194.

GIGLIO, R. (1970), 'Stochastic Capacity Models', *Management Science* 17(3), 175-184.

GILBERT, R. & HARRIS, R. (1984), 'Competition with lumpy investment', *Rand Journal of Economics* 15(2), 197-212.

GREENING, L.; BOYD, G. & ROOP, J. (2007), 'Modeling of industrial energy consumption: An introduction and context', *Energy Economics* 29, 599-608.

GRENADIER, S. (1996), 'The Strategic Exercise of Options: Developments Cascades and Overbuilding in Real Estate Markets', *The Journal of Finance* LI(5), 1653-1679.

GRENADIER, S. (1995), 'Valuing lease contracts - A real-options approach', *Journal of Financial Economics* 38, 297-331.

GRENADIER, S. (1999), 'Information Revelation Through Option Exercise', *Reviews of Financial Studies* 12, 95-130.

GRENADIER, S. R. (2002), 'Option Exercise Games: An Application to the Equilibrium Investment Strategies of Firms', *The Review of Financial Studies* 15(3), 691-721.

GUTHRIE, G. (2006), 'Regulating Infrastructure: The Impact on Risk and Investment', *Journal of Economic Literature* XLIV, 925-972.

HARKER, P. T. (1986), 'Alternative Models of Spatial Competition', *Operations Research* 34(3), 410-425.

HARRISON, J. M. & MIEGHEM, J. (1999), 'Multi-resource Investment Strategies: Operational Hedging under demand Uncertainty', *European Journal of Operational Research* 113, 17-29.

HASTINGS, N.A.J. (1973), 'Dynamic programming with management applications', Londres: Butterworths.

HLOUSKOVA, J.; KOSSMEIER, S.; OBERSTEINER, M. & SCHNABL, A. (2005), 'Real Options and the value of generating capacity in the German electricity market', *Review of Financial Economics* 14, 297-310.

HSU, V. N., (2002), 'Dynamic capacity expansion problem with deferred expansion and age-dependent shortage cost', *Manufacturing & Service Operations Management* 4 (1), 44-54.

HUANG, K. & AHMED, S. (2009), 'The Value of Multistage Stochastic



Programming in Capacity Planning Under Uncertainty', *Operations Research Articles in Advance*, 1-12.

HUANG, M. (2009), 'Real Options Approach-based demand forecasting method for a range of products with highly volatile and correlated demand', *European Journal of Operational Research* 198, 867-877.

HUCHZERMEIER, A. & COHEN, M. (1996), 'Valuing operational flexibility under exchange rate risk', *Operations Research* 44(1), 100-113.

HUH, W.; ROUNDY, R. & ÇAKANYLDIRIM, M. (2006), 'A General Strategic Capacity Planning Model under Uncertainty', *Naval Research Logistics* 53, 137-150.

HULL, J. C. (2006), 'Options, Futures and Other Derivatives', New Jersey: Prentice Hall.

KARABUK, S. & WU, S. (2003), 'Coordinating Strategic Capacity Planning in the Semiconductor Industry', *Operations Research* 51(6), 839-849.

KEPPO, J. & LU, H. (2003), 'Real Options and a Large Producer: the Case of Electricity Markets', *Energy Economics* 25, 459-472.

KLINCEWICZ, J. G.; LUSS, H. & YU, C. S. (1988), 'A large-scale multilocation capacity planning model', *European Journal of Operational Research* 34(2), 178-190.

KOGUT, B. & KULATILAKA, N. (1994), 'Operating flexibility, global manufacturing, and the option value of a multinational network', *Management Science* 40(1), 123-139.

KOUEVELIS, P. & GUTIERREZ, G. (1997), 'The newsvendor problem in a global market: Optimal centralized and decentralized control policies for a two-market stochastic inventory system', *Management Science* 43(5), 571-585.

KRUGMAN, P. & OBSTFELD, M. (1999), 'Economia', São Paulo: Makron Books.

KULATILAKA, B. K. N. & PEROTTI, E. C. (1998), 'Strategic Growth Options', *Management Science* 44(8), 1021-1031.

LAMBRECHT, B. & PERRAUDIN, W. (2003), 'Real Options and Preemption under Incomplete Information', *Journal of Dynamics & Control* 27, 619-643.

LEAHY, J. V. (1993), 'Investment in Competitive Equilibrium: The Optimality of Myopic Behaviour', *The Quarterly Journal of Economics* 108(4), 1105-1133.

LI, S. & TIRUPATI, D. (1994), 'Dynamic Capacity Expansion Problem with Multiple Products: Technology Selection and Timing of Capacity Additions', *Operations Research Society of America* 42(5), 958-976.

LIEBERMAN, M. (1987), 'Market Growth, Economies of Scale, And Plant Size in the Chemical Processing Industries', *The Journal of Industrial Economics* XXXVI(2), 175-191.

LIEBERMAN, M. (1989), 'Capacity utilization: Theoretical models and empirical tests', *European Journal of Operational Research* 40, 155-168.

LUCAS, J. & PRESCOTT, E. C. (1971), 'Investment under Uncertainty', *Econometrica* 39(5), 659-681.

LUSS, H. (1982), 'Operations Research and Capacity Expansion Problems: A Survey', *Operations Research* 30(5), 907-947.

MADLENER, R.; KUMBAROGLU, G. & EDIGER, V. (2005), 'Modeling technology adoption as an irreversible investment under uncertainty: the case of the Turkish electricity supply industry', *Energy Economics* 26, 139-163.

MANNE, A. S. (1961), 'Capacity Expansion and Probabilistic Growth', *Econometrica* 29(4), 632-649.

MANNE, A. S. (1967), 'Investments for Capacity Expansion: size, location and time-phasing', Cambridge, MA: MIT Press.

- MASKIN, E. & TIROLE, J. (2001), 'Markov Perfect Equilibrium', *Journal of Economic Theory* 100, 191-219.
- MATSUMOTO, F.; FAHLBUSH, P. & STIFFLER, E. (1989), 'Capacity Expansion Model for Hydrothermal Power Systems', *ASCE Journal of Water Resources Planning and Management* 115(2), 165-185.
- McDONALD, R. & SIEGEL, D. (1985), 'Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down', *International Economic Review* 26(2), 331-349.
- McDONALD, R. & SIEGEL, D. (1986), 'The Value of Waiting to Invest', *The Quarterly Journal of Economics* 101(4), 707-728.
- MIEGHEM, J. (2003), 'Capacity Management, Investment, and Hedging: Review and Recent Developments', *Manufacturing & Service Operations Management* 5(4), 269-302.
- MIEGHEM, J. & DADA, M. (1999), 'Price Versus Production Postponement: Capacity and Competition', *Management Science* 45(12), 1631-1649.
- MIEGHEM, J. & RUDI, N. (2002), 'Newsvendor Networks: Inventory Management and Capacity Investment with Discretionary Activities', *Manufacturing & Service Operations Management* 4(4), 313-335.
- MILLS, D. (1990), 'Capacity expansion and the size of plants', *RAND Journal of Economics* 21(4), 555-566.
- MUROAKA, Y. & OYAMA, T. (2004), 'Generating Planning Including Distributed Generators under Uncertainty of Demand Growth', *Electrical Engineering in Japan* 146(3), 17-24.
- MURPHY, F. & SMEERS, Y. (1999), 'Spatial Oligopolistic Electricity Models with Cournot Generators and Regulated Transmission Prices', *Operations Research* 47(1), 102-112.
- MURTO, P. (2004), 'Exit in duopoly under uncertainty', *RAND Journal of Economics* 35(1), 111-127.
- MURTO, P. & KEPPÖ, J. (2002), 'A game model of irreversible

investment under uncertainty', *International Game Theory Review* 4, 127-140.

MURTO, P.; NASAKKALA, E. & KEPPO, J. (2004), 'Timing of Investments in Oligopoly under Uncertainty: A Framework for Numerical Analysis', *European Journal of Operational Research* 157, 486-500.

MYERS, S. & MAJD, S. (1990), 'Abandonment Value and Project Life', *Advances in Futures and Options Research*, 1-21.

MYERS, S. C. (1977), 'Determinants of Corporate Borrowing', *Journal of Financial Economics* 5, 147-175.

NAGURNEY, A. (1999), 'Network Economics: A Variational Inequality Approach Revised Second Edition', Boston: Kluwer Academic Publishers.

NAGURNEY, A. (2009), 'Network Economics', *Handbook of Computational Econometrics*, David Belsley e Erricos Kontoghiorghes, Editors, Chichester: John Wiley & Sons, 429-486.

NEEBE, A. W. & RAO, M. (1986), 'Sequencing Capacity Expansion Projects In Continuous Time', *Management Science* 32(11), 1467-1479.

NOVAES, A. & SOUZA, J. (2005), 'A Real Options Approach to a Classical Capacity Expasion Problem', *Pesquisa Operacional* 25(2), 159-181.

OREN, S. (2001), 'Integrating real and financial options in demand-side electricity contracts', *Decision Support Systems* 30, 279-288.

PANGBURN, M. & SUNDARESAN, S. (2009), 'Capacity decisions for high-tech products with obsolescence', *European Journal of Operational Research* 197, 102-111.

PARASKEVOPOULOS, D.; KARAKITSOS, E. R. B. (1991), 'Robust Capacity Planning Under Uncertainty', *Management Science* 37(7), 787-800.

PASTORE, A.; GAZZANO, M.; PINOTTI M. (2012), 'Porque

produção industrial não cresce desde 2010? ', Instituto Braudel-FAAP, <http://www.brasil-economia-governo.org.br/2012/08/27/por-que-a-producao-industrial-nao-cresce-desde-2010/>, acessado em 30/08/2012;

PINDYCK, R. S. (1988), 'Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm', *The American Economic Review* 78(5), 969-985.

PINDYCK, R. S. (1991), 'Irreversibility, Uncertainty, and Investment', *Journal of Economic Literature* XXIX, 1110-1148.

PINDYCK, R. S. & RUBINFELD, D. L. (2010), 'Microeconomia', São Paulo: Pearson Education do Brasil.

RAJAGOPOLAN, S. (1998), 'Capacity Expansion and Equipment Replacement: A Unified Approach', *Operations Research* 46(6), 846-857.

RAJAGOPALAN, S.; SINGH, M. R. & MORTON, T. E. (1998), 'Capacity expansion and replacement in growing markets with uncertain technological breakthroughs', *Management Science* 44, 12-30.

RAJAGOPOLAN, S. & SWAMINATHAN, J. (2001), 'A Coordinated Production Planning Model with Capacity Expansion and Inventory Management:', *Management Science* 47(11), 1562-1580.

RAO, M. & RUTENBERG, D. P. (1977). 'Multilocation Plant Sizing and Timing', *Management Science* 23, 1187-1198.

SAMUELSON, P. (1952), 'Spatial Equilibrium and Linear Programming', *American Economic Review* 42, 283-303.

SHERALI, H. D.; SOYSTER, A. L. & MURPHY, F. H. (1983), 'Stackelberg-Nash-Cournot equilibria: Characterizations and computations'. *Operation Research* 31, 253-276.

SIDDIQUI, A. & MARIBU, K. (2009), 'Investment and upgrade in distributed generation under uncertainty', *Energy Economics* 31, 25-37.

SLACK, N.; CHAMBERS, S. & JOHNSTON, R. (2002), 'Administração da Produção', São Paulo: Editora Atlas.

SMITH, R. (1979), 'Turnpike Results For Single Location Capacity Expansion', *Management Science* 25(5), S.

SMITH, R. (1980), 'Optimal Expansion Policies for the Deterministic Capacity Problem', *The Engineering Economist* 25(3), 149-160.

SMIT, H. & ANKUM, L. (1993), 'A real options and game-theoretic approach to corporate investment strategy under competition', *Financial Management* 22(3), 241-250.

SMIT, H. & TRIGEORGIS, L. (2004), 'Strategic Investment', New Jersey: Princeton University Press.

SMITH, R. A. & VILLEGAS, A. M. (1997), 'A Comparative Analysis of Various Optimization Models for Electricity Capacity Expansion', *International Transactions in Operational Research* 4(1), 35-44.

TAKAYAMA, T. & JUDGE, G. (1964), 'An intertemporal price equilibrium model', *Journal of Farm Economics* 46, 477-484.

TRIGEORGIS, L. (1996), 'Real Options: Managerial Flexibility and Strategies in Resource Allocation', Cambridge, MA: MIT Press.

TRIGEORGIS, L. & MASON, S. (1987), 'Valuing Managerial Flexibility', *Midland Corporate Finance Journal* 5(1), 14-21.

VARGAS, F. G. (2010), 'Sondagem de Investimentos', <http://portalibre.fgv.br>, acessado em 10/02/2011.

VON NEUMANN, J. e MORGENSTERN, O. 'Theory of Games and Economic Behavior', Princeton Press, 1947.

WEEDS, H. (2002), 'Strategic Delay in a Real Options Model of R&D Competition', *Review of Economic Studies* 69(3), 729-747.

WILLIAMS, J. T. (1993), 'Equilibrium and Options on Real Assets', *The Review of Financial Studies* 6(4), 825-850.

WU, S.; ERKOC, M. & KARABUK, S. (2005), 'Managing Capacity in the High-Tech Industry: A Review of Literature', *The Engineering Economist* 50, 125-158.

YAGED, B. (1973), 'Minimum Cost Routing for Dynamic Network Models', *Networks* 10, 193-224.

YANG, M.; BLYTH, W.; BRADLEY, R.; BUNN, D.; CLARKE, C. & WILSON, T. (2008), 'Evaluating the power investment options with uncertainty in climate policy', *Energy Economics* 30, 1933-1950.

ZANGWILL, W. (1966), 'A Deterministic Multi-period Production Scheduling Model with Backlogging', *Management Science* 13(1), 105-119.

ZHANG, F.; ROUNDY, R.; ÇAKANYILDIRIM, M. & HUH, W. (2004), 'Optimal Capacity Expansion for Multi-product, Multi-machine, Manufacturing Systems with Stochastic Demand', *IIE Transactions* 36, 23-36.

ÇAKANYILDIRIM, M. & ROUNDY, R. (2002a), 'Evaluation of Capacity Planning Practices for the Semiconductor Industry', *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing* 15(3), 331-340.

ÇAKANYILDIRIM, M. & ROUNDY, R. (2002b), 'Optimal Capacity Expansion and Contraction under Demand Uncertainty', enviado por e-mail pelo próprio autor (metin@utdallas.edu).





## APÊNDICE A - INTRODUÇÃO À TEORIA DOS JOGOS<sup>25</sup>

### A.1. INTRODUÇÃO

A área da literatura que analisa a interação estratégica entre empresas de forma endógena aos modelos, ou seja, que prevê no próprio modelo as possíveis ações e reações racionais de empresas e que impactam outras empresas é chamada de teoria de jogos. Embora a teoria dos jogos tem sido aplicada atualmente em vários campos de estudo, o foco deste apêndice está em sua aplicação no campo da economia. Os primeiros estudos de jogos na área econômica foram com os célebres trabalhos de Cournot (1838, apud Nagurney, 1999) e Bertrand (1883, apud Nagurney, 1999) sobre competição oligopolista em preços e produção, respectivamente. Porém tais estudos foram considerados como modelos especiais e praticamente não mudaram a forma de pensamentos dos economistas da época. A idéia de uma teoria geral de jogos foi introduzida por John Von Neumann e Oskar Morgenstern no seminal trabalho “Teoria dos Jogos e Comportamento Econômico”, em 1944 (Cusinato, 2003), onde foi proposto que muitas das questões econômicas fossem analisadas como jogos.

### A.2. JOGOS NA FORMA EXTENSIVA

Existem duas formas quase equivalentes de se definir jogos: a forma estratégica ou normal, usando matrizes e a forma extensiva, através de árvores de jogo, ou seja, árvores de decisão generalizadas para múltiplos decisores.

Um jogo em sua forma normal é composto por três elementos: (a) um conjunto de jogadores  $i \in \mathcal{I}$ , denotados pelo conjunto finito  $i = \{1, 2, \dots, M\}$ ; (b) um espaço de estratégias puras  $S_i$  para cada jogador  $i$ ; (c) e funções de retorno  $z_i$ , chamadas de função de utilidade esperada que fornecem a utilidade de Newmann-Morgenstern  $z_i(s)$  para cada perfil de estratégia  $s = \{s_1, s_2, \dots, s_I\}$ . Nesta tese, como função de utilidade esperada será usado o valor presente esperado do fluxo de caixa descontado. Para se referenciar a outros jogadores além do jogador  $i$ , será utilizada a notação  $-i$ . Cabe ressaltar que isto não significa que o jogo é entre o jogador  $i$  e o resto dos jogadores. Na verdade, cada jogador tem como objetivo maximizar o seu próprio retorno.

Aqui serão tratados apenas os jogos de informação perfeita, onde o jogador tem conhecimento, a cada período de tempo, do nó de decisão que ele está em uma árvore de jogo. Assume-se também que a estrutura do jogo é de *conhecimento comum* aos jogadores, ou seja, todos os jogadores conhecem a estrutura do jogo e seus respectivos valores e sabem que os seus oponentes

---

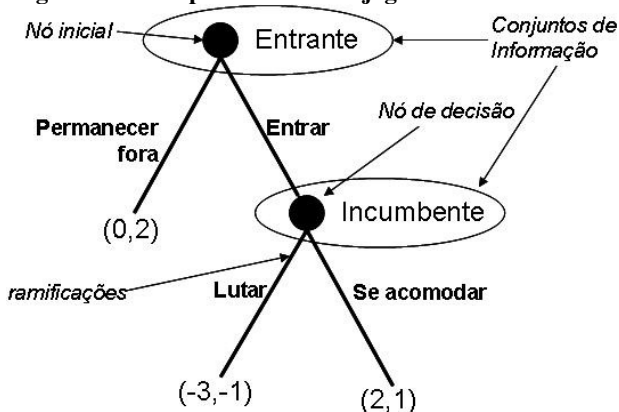
<sup>25</sup> Adaptado de Fudenberg e Tirole (2001) páginas 1-42 e Dias (2005) páginas 319-326.

também conhecem e sabem também que os seus oponentes sabem que eles sabem, e assim por diante. Esta premissa é relevante para o entendimento do conceito do equilíbrio de Nash.

Define-se estratégia de um jogador  $S_i$  como uma regra de decisão que descreve as ações a serem tomadas em cada nó da árvore de jogo, quando o jogador deve jogar. As estratégias ótimas devem levar em consideração as estratégias de outros jogadores que são denotadas por  $S_{-i}$ . Foca-se aqui a atenção em jogos finitos, ou seja, jogos onde  $S = \times_i S_i$  é finito.

Os jogos, na forma extensiva, podem ser vistos como uma generalização de uma árvore de decisão com múltiplos jogadores e são compostos pelos seguintes componentes: (a) um nó inicial, a partir do qual existem ações, sendo que uma delas é selecionada pelo jogador; (b) ramificações, que representam as ações disponíveis em cada nó; (c) nó terminal que é um nó a partir do qual não existem mais ações. (d) nó de decisão, que é um nó no qual um jogador tem mais de uma opção de escolha. Um nó inicial pode também ser um nó de decisão. (e) conjunto de informação, que são os nós de decisão em que um jogador deve considerar ao tomar sua decisão. Em geral, um conjunto de informação é associado a único nó de decisão. Mas há casos em que o jogador não tem conhecimento sobre qual nó de decisão ele deve considerar para tomar a decisão. Neste caso, o conjunto de informação do jogador tem mais de um nó de decisão. Essa situação é típica de jogos simultâneos. A figura A.1.1 ilustra os componentes de um jogo na forma extensiva, utilizando o exemplo clássico do jogo de uma empresa entrante e a empresa incumbente.

**Figura A.1 Componentes de um jogo na forma extensiva**



Fonte: adaptado de Fudenberg e Tirole (2001).

No exemplo da figura A.1.1, a empresa entrante se move primeiro e a empresa incumbente observa a decisão da empresa entrante.

### A.3. ESTRATÉGIA PURA E MISTA

Quando uma estratégia é escolhida de forma determinística, esta é chamada de estratégia pura, onde o jogador  $i$  escolhe a estratégia  $s_i(H)$  a cada conjunto de informação  $H$ . Quando o jogador escolhe de forma probabilística uma estratégia a partir de um conjunto de estratégias puras, esta é chamada de estratégia mista. Assim, uma estratégia mista  $\sigma_i$  é um valor esperado dos valores das estratégias puras ponderadas pelas probabilidades relevantes. Cada decisão aleatória de um jogador é estatisticamente independente daquelas de seus oponentes e os retornos de um perfil de estratégias mistas são os valores esperados dos retornos correspondentes das estratégias puras.

Denota-se o espaço de estratégias mistas do jogador  $i$  por  $\sum_i$ , onde  $\sigma_i(s_i)$  é a probabilidade do perfil  $s_i$ . O espaço de perfis de estratégias mistas é denotado por  $\sum = \times_i \sum_i$ , com elemento  $\sigma$ .

Seja  $z_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ , o valor da estratégia mista  $\sigma_i$  para o jogador  $i$  quando os demais jogam as estratégias mistas  $\sigma_{-i}$ . A estratégia  $\sigma_i$  é a melhor resposta de  $i$  para o perfil  $\sigma_{-i}$  de  $M-1$  estratégias mistas dos outros jogadores se:

$$z_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq z_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}), \text{ para qualquer } \sigma'_i \in \Delta(S_i) \quad (\text{A.1})$$

Onde  $\Delta(S_i)$  é o conjunto simplex do conjunto das estratégias puras  $S_i$ . Chama-se conjunto simplex a uma extensão de estratégias puras que identifica as probabilidades a todas as estratégias puras disponíveis para o jogador  $i$ .

Uma estratégia pura pode ser estritamente dominada por uma estratégia mista se ela não é estritamente dominada por qualquer uma estratégia pura. Considere que a estratégia do jogador  $i$  está variando enquanto as estratégias de outros jogadores se mantêm fixas.

Seja  $s_{-i} \in S_{-i}$ .

Considere fixas as estratégias de todos os jogadores com exceção de  $i$ , assim pode-se denotar:

$$(s_i, s_{-i}) = (s_1, \dots, s_{i-1}, s'_{i+1}, \dots, s_M)$$

Similarmente, para estratégias mistas tem-se:

$$(\sigma_i, \sigma_{-i}) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma'_{i+1}, \dots, \sigma_M).$$

Definição A1: Estratégia pura  $s_i$  é estritamente dominada para o jogador  $i$  se existe  $\sigma'_i \in \sum_i$  tal que:

$$z_i(\sigma'_i, s_{-i}) > z_i(s_i, s_{-i}), \text{ para todo } s_{-i} \in S_{-i} \quad (\text{A.2})$$

Diz se que a estratégia  $s_i$  é estritamente dominada por  $\sigma'_i$  e assim a estratégia  $s_i$  pode ser excluída, pois ela não deve ser jogada por jogadores racionais.

Na equação B.2, se no lugar da desigualdade estrita “<” tiver a desigualdade não estrita “≤”, então a estratégia  $s_i$  é chamada de estratégia fracamente dominada. Estratégias fracamente dominadas não devem ser excluídas de imediato, pois podem ser equilíbrios de Nash, mas em geral são excluídas quando se utiliza equilíbrios mais refinados como o equilíbrio perfeito em subjogos, apresentados na seção 3.3.4.

#### A.4. DEFINIÇÃO DE EQUILÍBRIO DE NASH:

Um equilíbrio de Nash é um perfil de estratégia tal que cada estratégia de jogador é uma resposta ótima para as estratégias de outros jogadores.

Definição: um perfil de estratégia mista  $\sigma^*$  é um *equilíbrio de Nash* se, para todos os jogadores  $i$ ,

$$z_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq z_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \text{ para todo } s_i \in S_i.$$

Um equilíbrio Nash de estratégia pura é um perfil de estratégia pura que satisfaz as mesmas condições.

Um equilíbrio de Nash implica que as estratégias que fazem parte desse equilíbrio são simultaneamente as melhores respostas para todos os jogadores. Dessa forma, não há incentivo para nenhum jogador desviar desse equilíbrio, unilateralmente. Para saber se é um equilíbrio de Nash basta fazer a seguinte pergunta para cada jogador, separadamente: mudando a sua estratégia você teria um retorno maior? Se todos os jogadores responderem negativamente, então o perfil de estratégias é um equilíbrio de Nash. Desde que utilidades esperadas são lineares nas probabilidades, se um jogador usa uma estratégia mista não

degenerada (existe uma probabilidade positiva para pelo menos uma estratégia), este jogador deve ser indiferente entre todas as estratégias puras nas quais ele joga com probabilidade positiva e essas estratégias mistas são tão boas quanto às estratégias que tiverem probabilidades zero. Para se testar se o perfil  $\sigma^*$  é um equilíbrio de Nash, é suficiente testar se há incentivos para desviar da estratégia mista  $\sigma_i$  para a estratégia pura  $s_i$ . Caso não haja este incentivo, então se constata que é um equilíbrio de Nash.

Um equilíbrio de Nash é estrito se cada jogador tem uma única melhor resposta para as estratégias de seus competidores. Ou seja,  $s^*$  é uma estratégia de equilíbrio estrita se, e somente se, ela é um equilíbrio de Nash e, para todo  $i$  e todo  $s_i \neq s_i^*$ ,

$$z_i(s_i^*, s_{-i}^*) > z_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Por definição, um equilíbrio estrito é necessariamente um equilíbrio de estratégia pura.

Existência de Equilíbrio de Nash: todo jogo em que se permitam estratégias mistas e no qual os conjuntos de estratégias puras de todos os jogadores são finitos tem pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Já em um jogo que exista apenas estratégias puras, a existência de equilíbrio de Nash só é garantida em alguns casos, pois o conjunto de estratégias de cada jogador deve ser convexo e para isso deve ser um conjunto de infinitas estratégias. A grande maioria dos jogos tem equilíbrio de Nash. O problema é que muitos deles têm mais de um equilíbrio de Nash, de forma que é necessário um processo de refinamento do equilíbrio de Nash para selecionar a estratégia ótima. O equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é um conceito de equilíbrio muito importante neste sentido, conforme apresentado na seção 3.3.4.

De acordo com Fudenberg e Tirole (2001), o equilíbrio de Nash está implícito em dois dos primeiros jogos que foram estudados na literatura econômica, ou seja, nos modelos de Cournot e Bertrand, em 1838 (apud Fudenberg e Tirole, 2001) e 1883 (apud Fudenberg e Tirole, 2001), respectivamente. No modelo de Cournot, as empresas escolhem simultaneamente as quantidades que produzirão e vendem a um preço tal que o mercado absorve toda a oferta. No modelo Bertrand, as empresas escolhem simultaneamente os seus preços e então devem produzir uma quantidade suficiente para atender toda a demanda, após as escolhas dos preços se tornarem conhecidas. Em cada um dos modelos, o equilíbrio é determinado pela condição de que todas as empresas escolhem a melhor resposta em antecipação ao jogo de cada um de seus competidores. O equilíbrio de Nash são previsões consistentes de como o jogo será jogado no sentido de que todos os jogadores prevêem que um equilíbrio de Nash particular deverá ocorrer e que todos os jogadores não terão nenhum incentivo para mudar sua estratégia.



## APÊNDICE B - O PROBLEMA DE INEQUAÇÃO VARIACIONAL<sup>26</sup>

### B.1. INTRODUÇÃO

A seguir os problemas de equilíbrio na competição perfeita, monopólio e oligopólio serão apresentados na forma de Problemas de Inequações Variacionais (VIP). A teoria de inequação variacional é uma formulação geral que incorpora uma gama de problemas matemáticos, tais como, equações não lineares, problemas de otimização, de complementaridade e de ponto fixo. Recentemente a teoria tem sido utilizada para resolver problemas de equilíbrio econômico. A formulação de inequações variacionais é particularmente conveniente porque permite um tratamento unificado para problemas de equilíbrio, permitindo sintetizar um espectro de mercados que contempla desde problemas de equilíbrio espacial de preços até problemas de equilíbrio para mercados imperfeitamente competitivos, tais como o oligopólio e o seu caso particular de monopólio.

O apêndice B apresenta a definição formal de um Problema de Inequação Variacional bem como, os relacionamentos entre a formulação dos problemas matemáticos já bem conhecidos na literatura, normalmente utilizados para a obtenção de equilíbrio, e o problema de inequações variacionais, fundamentando teoricamente as formulações de inequações variacionais apresentadas nesta tese.

Inequações variacionais foram originalmente desenvolvidas como uma ferramenta para o estudo de certas classes de equações diferenciais parciais de dimensão infinita, tais como, as que aparecem na área de mecânica. O foco apresentado no livro de Nagurney (1999), entretanto, está em problemas de inequações variacionais de dimensão finita aplicado à área econômica.

### B.2. DEFINIÇÃO DE VIP

O problema de inequações variacionais de dimensão finita,  $VI(F, \Omega)$ , consiste em determinar um vetor  $x^* \in \Omega \in R^n$ , tal que:

$$\langle F(x^*)^T, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \quad (B.1)$$

Onde  $F$  é uma função dada, contínua de  $\Omega$  em  $R^n$ , e  $\Omega$  é um conjunto fechado e convexo.

Em termos geométricos, conforme pode ser observado na figura B.1, a inequação variacional (B.1) determina que  $F(x^*)^T$  seja ortogonal ao conjunto

---

<sup>26</sup> Extraído do livro de Nagurney, A. (1999).

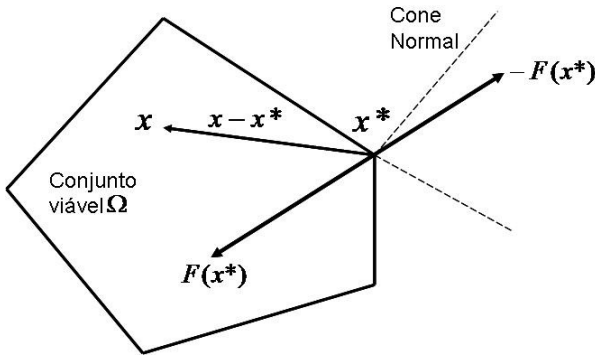
viável  $\Omega$  no ponto  $x^*$ . Note que a condição necessária e suficiente para  $x^*$  ser a solução de  $VI(F, \Omega)$  é que:

$$-F(x^*) \in C(x^*) \quad (\text{B.2})$$

Onde  $C(x)$  denota o cone normal de  $\Omega$  no ponto  $x$ , definido por:

$$C(x) \equiv \{y \in R^n : \langle y^T, x' - x \rangle \leq 0, \forall x' \in \Omega\} \quad (\text{B.3})$$

**Figura B.1** – Interpretação geométrica de  $VI(F, \Omega)$ .



Fonte: adaptado de Nagurney (1999).

De modo equivalente, ressalta-se que para dois vetores  $v, u \in R^n$ , o produto interno  $\langle u^T, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ . Então para um  $\theta$  no intervalo  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ , tem-se que  $\langle u^T, v \rangle \geq 0$ . Assim, pode-se observar na figura B.1., que  $x^*$  é solução do  $VI(F, \Omega)$ , se e somente se o ângulo entre os vetores  $F(x^*)$  e  $x - x^*$ , com  $x^*$  e  $x$  em  $\Omega$ , é menor ou igual a  $90^\circ$ .



O problema de inequação variacional como será apresentado pelas proposições seguintes, é particularmente conveniente, pois permite tratar problemas de equilíbrio e problemas de otimização de uma só vez. Na verdade, muitos problemas matemáticos podem ser formulados como problemas de inequação variacional, e diversos exemplos aplicam-se a análise de equilíbrio, como será visto a seguir.

### B.3. SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Muitos problemas econômicos clássicos têm sido formulados como sistemas de equações. Em termos de um problema de inequação variacional, a formulação de um sistema de equações é dada conforme segue.

#### **Proposição B.1. Um sistema de equações é VIP<sup>27</sup>**

Seja  $\Omega = R^n$  e seja  $F : R^n \mapsto R^n$  uma dada função. Um vetor  $x^* \in R^n$  é a solução de um problema de inequação variacional  $VI(F, R^n)$  se e somente se  $F(x^*) = 0$ . Em outras palavras, uma solução  $x^* \in R^n$  para o sistema de equações  $F(x) = 0$  pode ser obtida resolvendo o problema  $VI(F, R^n)$ , isto é, encontrando um  $x^* \in R^n$  que satisfaça a seguinte condição:

$$\langle F(x^*)^T, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in R^n.$$

### B.4. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Um problema de otimização é caracterizado pela sua função objetivo específica, que pode ser de maximização ou minimização, e de suas restrições. Em um contexto econômico, a função objetiva geralmente representa lucro, custo, participação no mercado, risco de portfólio, entre outros indicadores. As restrições geralmente representam limites de orçamento ou de recursos, não negatividade de variáveis, equações de conservação, etc. Normalmente, um problema de otimização consiste de uma única função objetiva. Problemas de otimização com ou sem restrições podem ser formulados como um problema de inequação variacional, conforme proposição a seguir.

---

<sup>27</sup> A demonstração da proposição B.1 é apresentada em Nagurney (1999).

### Proposição B.2. Um problema de otimização é VIP<sup>28</sup>

Seja  $x^*$  a solução do seguinte problema de otimização:

$$\text{Minimize } f(x) \quad (\text{B.4})$$

$$\text{Sujeito a: } x \in \Omega \quad (\text{B.5})$$

Onde  $f(x)$  é continuamente diferenciável e  $\Omega$  é fechado e convexo. Então  $x^*$  é a solução do problema de inequação variacional:

$$\langle \nabla f(x^*)^T, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{B.6})$$

O caso particular de problemas sem restrição corresponde a situação em que  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Contudo, apesar de um problema de otimização poder ser posto sob a forma de um problema de inequação variacional, a recíproca nem sempre é verdadeira. De fato,  $VI(F, \Omega)$  é um problema mais geral, que somente é equivalente a um problema de otimização nos casos em que a matriz Jacobiano, definida por:

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

é simétrica e semidefinida positiva. Nestes casos sempre haverá uma função  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^1$  que satisfaz a condição  $\nabla f(x) = F(x)$ , tal que  $x^*$ , solução de  $VI(F, \Omega)$ , também é solução do problema de otimização (B.4)-(B.5).

### B.5. PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIDADE

---

<sup>28</sup> A demonstração da proposição B.2 é apresentada em Nagurney (1999).

O problema de inequação variacional inclui o problema de complementaridade como um caso especial. Problemas de complementaridade são definidos no ortante não negativo  $R_+^n$ .

### Proposição B.3. Um problema de complementaridade é VIP

Seja  $R_+^n$  o ortante não negativo de  $R^n$ , e seja  $F : R^n \mapsto R^n$ . O problema de complementaridade sobre  $R_+^n$  é um sistema de equações e inequações no qual se deseja encontrar  $x^* \geq 0$  tal que:

$$F(x^*) \geq 0 \text{ e } \left\langle F(x^*)^T, x^* \right\rangle = 0 \quad (\text{B.8})$$

então  $x^*$  é solução de  $VI(F, R_+^n)$ .

Quando o mapeamento  $F$  é afim, ou seja, quando  $F(x) = M.x + b$ , onde  $M$  é uma matriz  $n \times n$ , e  $b$  um vetor  $n \times 1$  o problema (B.8) é denominado um problema de complementaridade linear.

### B.6. PROBLEMAS DE PONTO FIXO

A teoria do ponto fixo tem sido utilizada para formular, analisar e resolver problemas de equilíbrio econômico. A relação entre um problema de inequação variacional e um problema de ponto fixo pode ser feito através do uso de um operador de projeção. Este operador de projeção é definido a seguir.

#### Definição B.1. Projeção ortogonal<sup>29</sup>

Seja  $\Omega$  um conjunto fechado e convexo em  $R^n$ . Então, para cada  $x \in R^n$  existe um único ponto  $y \in \Omega$ , tal que

$$\|x - y\| \leq \|x - z\|, \quad \forall z \in \Omega \quad (\text{B.9})$$

---

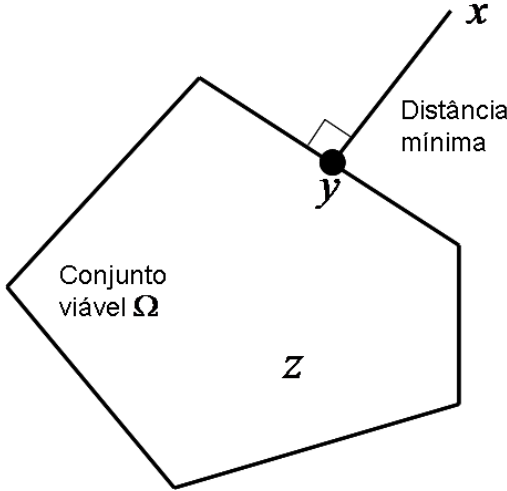
<sup>29</sup> A demonstração da definição B.1 é apresentada em Nagurney (1999).

Onde  $y$  é conhecido como sendo a projeção ortogonal Euclidiana de  $x$  sobre o conjunto  $\Omega$ , isto é:

$$y = P_{\Omega}x = \arg \min_{z \in \Omega} \|x - z\|, \quad (\text{B.10})$$

A figura B.2 ilustra a projeção de  $x$  sobre o conjunto  $\Omega$ . A prova da equação (B.10) é apresentada em Nagurney (1999).

**Figura B.2.** A projeção  $y$  de  $x$  sobre o conjunto viável.



Fonte: adaptado de Nagurney (1999).

Seja  $\Omega$  um conjunto convexo. Então  $y = P_{\Omega}x$  se e somente se:

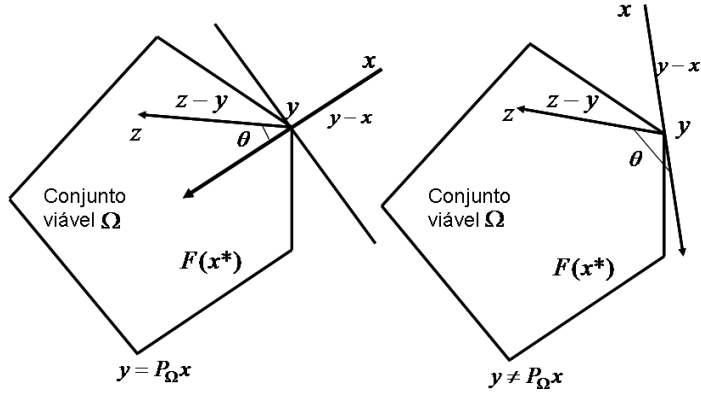
$$\langle y^T, z - y \rangle \geq \langle x^T, z - y \rangle, \quad \forall z \in \Omega \quad (\text{B.11})$$

ou

$$\langle (y - x^T), z - y \rangle \geq 0, \quad \forall z \in \Omega \quad (\text{B.12})$$

Dessa forma, a equivalência entre o problema de inequação variacional e o problema de ponto fixo (projeção ortogonal) pode ser observada geometricamente através da figura B.3..

**Figura B.3.** Representação geométrica do problema de inequação variacional  $\langle (y - x^T), z - y \rangle \geq 0$ , para  $y = P_{\Omega}x$  e  $y \neq P_{\Omega}x$ .



Fonte: adaptado de Nagurney (1999).

### Teorema B.1.<sup>30</sup>

Seja  $\Omega$  um conjunto convexo e fechado. Então  $x^* \in \Omega$  é uma solução do problema de inequação variacional  $VI(F, \Omega)$  se e somente se para qualquer  $\gamma > 0$ ,  $x^*$  é um ponto fixo de mapeamento:

$$P_{\Omega}(I - \gamma F) : \Omega \mapsto \Omega \quad (\text{B.13})$$

ou seja,

$$x^* = P_{\Omega}(x^* - \gamma F(x^*)) \quad (\text{B.14})$$

Em outras palavras, a solução  $x^*$  de (B.1) é a projeção ortogonal em  $\Omega$  do vetor  $x^* - \gamma F(x^*)$  para qualquer  $\gamma > 0$ . Logo, a função  $F$  pode ser interpretada como um campo vetorial no conjunto  $\Omega$ , onde no ponto  $x^*$  que resolve  $VI(F, \Omega)$ , o campo vetorial é normal à fronteira e aos pontos

<sup>30</sup> A demonstração do teorema B.1. é apresentada em Nagurney (1999).

interiores. Consequentemente, a projeção de  $x^* - \gamma F(x^*)$  é igual a  $x^*$ . Esta propriedade não é satisfeita para nenhum outro ponto em que  $x \neq x^*$  e  $x \in \Omega$ .

## B.7. ALGORITMO PDS

O desenvolvimento de algoritmos eficientes para a resolução de problemas de equilíbrio é considerado na literatura como um tema de igual importância a análise qualitativa do equilíbrio. A complexidade de problemas econômicos, combinado com o porte crescente dos modelos que os descrevem são impeditivos para que sejam obtidas por soluções analíticas de forma fechada. De maneira geral, algoritmos de inequação variacional convergem para o equilíbrio iterativamente e progressivamente através de formas lineares ou relaxadas do sistema original. Em Nagurney (1999), capítulo 2, são descritos vários desses algoritmos, cada um dos quais adequados a diferentes estruturas do problema de inequação variacional.

O algoritmo utilizado neste trabalho, apresentado na seção 3.5.7, resulta do estudo de problemas de equilíbrio em uma configuração dinâmica, chamado de teoria de sistemas dinâmicos projetados (PDS)<sup>31</sup>. Uma das características notáveis desta teoria é o seu relacionamento com o problema de inequação variacional. Os sistemas dinâmicos projetados (PDS), no entanto, estendem o estudo estático de estados de equilíbrio ao introduzir uma dimensão de tempo de forma a permitir a análise do comportamento de desequilíbrio que precede o equilíbrio.

O algoritmo iterativo geral do PDS é apresentado inicialmente na seção 3.5.6 e incorporado ao algoritmo geral de solução do modelo desta tese na seção 4.4.2.

### B7.1 Condições de convergência

A seguinte notação é necessária para a declaração de premissas para a convergência.

Para cada  $x \in R^n$ , considere a função  $F(x)$  pode ser definida como:

$$F(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{cov}\left\{F(y) : \|x - y\| \leq \varepsilon\right\}} \quad (\text{B.15})$$

Onde a linha superior indica fechado e  $\text{cov}(A)$  denota a convexidade do conjunto  $A$ . Então  $F(x)$  é uma função convexo e semi contínua superior, particularmente,  $F(x) = F(x)$ , onde  $F$  é contínua em  $x$ .

---

<sup>31</sup> Para uma descrição de sistemas dinâmicos projetados referir-se à Nagurney (1999, pags. 38-41).

Para qualquer  $z \in R^n$ , diz-se que:

$$d(z, A) := \inf_{y \in A} \|z - y\|$$

é a distância entre  $z$  e  $A$ . Então,

$$d(z, A) = \|z - P_A(z)\|$$

Onde  $A$  é compacto e convexo.

### **Condições de convergência:**

Considere uma condição inicial  $x^0 \in \Omega$  e defina a sequência  $\{x^k; k = 1, 2, \dots\}$  por

$$x^{k+1} = P_\Omega \left( x^k - \alpha_k F_k(x^k) \right) \quad (\text{B.16})$$

Assume-se, as seguintes condições:

- (i)  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 0$ ,  $\alpha_k > 0$ ,  $\alpha_k \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .
- (ii)  $d(F_k(x), \bar{F}(x)) \rightarrow 0$ , uniformemente sobre os conjuntos compactos de  $\Omega$  quando  $k \rightarrow \infty$ .
- (iii) Considere  $y(\cdot)$  a única solução para  $x = \prod_{\Omega}(x, F(x))$  que satisfaz  $y(0) = y \in \Omega$ . O conjunto w-limite

$$w(\Omega) = \bigcup_{y \in K} \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s > t} \{y(s)\}}$$

está contido no conjunto de pontos estacionários de  $x = \prod_{\Omega}(x, -F(x))$ .

- (iv) A sequência  $\{x^k; k = 1, 2, \dots\}$  é limitada.
- (v) As soluções para  $\prod_{\Omega}(x, F(x))$  são estáveis no sentido que dado qualquer conjunto  $\Omega_1$ , existe um conjunto  $\Omega_2$  tal que

$$\bigcup_{y \in \Omega \cap \Omega_1} \bigcup_{t \geq 0} \{y(t)\} \subset \Omega_2$$

Um dos mais óbvios exemplos de campo vetorial é  $F_k(x) = F(x)$  para  $k = 1, 2, \dots$  e  $x \in \Omega$ . O que corresponde ao esquema Euler na aproximação numérica de equações diferenciais ordinárias clássicas. Outro exemplo é um esquema tipo Heun dado por:

$$F_k(x) = \frac{1}{2} [F(x) + F(x + P_\Omega(x - \alpha_k F(x)))] .$$

### **Teorema B.2. Convergência do Esquema geral iterativo PDS**

Seja  $S$  as soluções para o problema de inequação variacional (B.1), e assume-se as premissas (i)-(v). Considere a sequência  $\{x^k; k = 1, 2, \dots\}$  é o esquema gerado por (B.16). Então  $d(x^k, S) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

### **Corolário B.1.**

Considere as condições do teorema B.2, e também que  $S$  consiste de um conjunto finito de pontos. Então  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k$  existe e é igual a solução para o problema de inequação variacional.



## APÊNDICE C - SISTEMA COMPUTACIONAL PARA A OBTENÇÃO DA ESTRATÉGIA ÓTIMA DE EXPANSÃO DE CAPACIDADE – PROGRAMA FONTE

```

program EquilibrioNash;

uses
  Forms,
  uInterface in 'uInterface.pas' {Form1},
  uEquilibrio in 'uEquilibrio.pas',
  uVetor in 'Projecao\uVetor.pas',
  uProjecao in 'Projecao\uProjecao.pas',
  Urelatorio in 'Urelatorio.pas' {Form2};

{$R *.RES}

begin
  Application.Initialize;
  Application.CreateForm(TForm1, Form1);
  Application.Run;
end.
//*****
*****

unit uEquilibrio;
interface

Uses SysUtils,Dialogs,ExtCtrls,ComCtrls,Graphics,Forms,Chart,uProjecao,
Math;

Type
  tMatriz = Array of Array of Extended;

  tNode = Class
    ID : String[8];
    Grupo, Cap : Integer;
    Tipo : Char;
    A,B,Fluxo,Excedente, Cinv, Prob, Escala : Extended;
    Kincr, Capmax : Integer;
    TNumCap, ProdNumCap, EstAux, Valorj: Integer;
    Constructor Create (iTipo : Char; iGrupo: Integer; iA, iB:Extended; iCap:
Integer; iKincr:integer; iCapmax:integer; iCinv, iProb, iEscala:Extended);
    Function Preco : Extended;
    Procedure SetCapacidade(Valor : Integer);
  end;

```

end;

tCournotNash = Class

N,M,Count : Integer;

Produtor,Consumidor : Array of tNode;

CapInic : Array of Integer;

ValorEstado : Array of Array of Array of Array of Extended;

ValorEsperado : Array of Array of Array of Extended;

Kotimo : Array of Array of Array of Integer;

Estadoj : Array of Array of Array of Integer;

ProdutorFluxo,consumidorpreco : Array of Array of Array of Extended;

Demanda : Array of Array of Extended;

Custo,X,F : tMatriz;

TF,T0 : tDateTime;

CUnit,Passo : Extended;

//\*\*\*\*\*Variáveis de

Leitura da Programação Dinâmica \*\*\*\*\*

tMax : Integer;

Taxa, TaxaA, TaxaB : Extended;

//\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Constructor LerDados(NomeArquivo : String);

destructor Finalizar;

Procedure PDinamica(ProgressBar1:tProgressBar);

procedure CalcularF;

procedure CalcularExcedentes;

function ExcedenteSociedade : Extended;

function ExcedenteProdutor : Extended;

function ExcedenteConsumidor : Extended;

procedure AtualizarFluxoProdutorConsumidor;

function AtualizarFluxo : Extended;

procedure Equilibrar(Statusbar : tStatusBar; Chart : tChart);

function GetExcedenteProdutor(i : Integer) : Extended;

Procedure SetCapacidadeProdutor(i:Integer; Valor:Integer);

Procedure SetDemandaConsumidor(j:Integer; newA,newB : Extended);

Procedure DefinirNumEstados;

Procedure DefinirCapacidades(i:integer);

Function DefinirEstado : Integer;

```

function NumP : Integer;
function NumM : Integer;
function FtaxaA : Real;
function FtaxaB : Real;
function Ftmax : Integer;
function GetAconsumidor(m: Integer): Extended;
function GetBconsumidor(m: Integer): Extended;
Function GetCap(m:integer): Integer;
//Function GetInv(p,k:integer) : Extended;
Procedure Apresentar;
Procedure Simular(NSimul : Integer;PB:tProgressBar);
end;

```

implementation

```

Function MyFloatToStr(Number : Extended; Digits,Decimals : Integer) : String;
begin
    Result := FloatToStrF(Number,ffNumber,Digits,Decimals);
    While Length(Result) < Digits do Result := ' ' + Result;
end;

```

```

{ tNode }

```

```

//***** Apresentar Resultados
*****

```

```

procedure tCournotNash.Apresentar;
Var
    Arq : TextFile;
    t,w,i,j,k,p : Integer;

```

```

begin
    AssignFile(Arq,'Resultados2.txt');
    Rewrite(Arq);

```

```

        Writeln(Arq,'----- Dados de Leitura -----');
        Writeln(Arq,'-----');
        Writeln(Arq,'-----');
        Writeln(Arq,Horizonte de Planejamento = ', tMax: 10);    //Horizonte de
Planejamento

```

```

Writeln(Arq,'Número de Produtores    = ', M: 10);      //No. de Produtores
Writeln(Arq,'Numero de Mercados      = ', N: 10);
Writeln(Arq,'Taxa de Desconto        = ', Taxa: 10:2);   //Taxa de desconto
livre de risco
Writeln(Arq,'Taxa de Cresc Parametro A = ', TaxaA: 10:2); //Crescimento
da Demanda = parâmetro A
Writeln(Arq,'Taxa de Cresc Parametro B = ', TaxaB: 10:2); //Crescimento
da Demanda = parâmetro B
//Writeln(Arq,'Fator de Escala Invest = ', Escala: 10:2); //Fator de Escala
de Investimento

For i :=0 to M-1 do Writeln(Arq,'Incremento de Capac/Invest Firma Produtor',
i+1, '= ', Produtor[i].Kincr:10); // incremento de capacidade por investimento
de cada firma
Writeln(Arq);
For i :=0 to M-1 do Writeln(Arq,'Capacidade Inicial/Produtor Prod.      ', i+1,
'= ', Produtor[i].Cap:10); // capacidade inicial de cada firma
writeln(Arq);
For i :=0 to M-1 do Writeln(Arq,'Capacidade Máxima da firma Produtor    ',
i+1, '= ', Produtor[i].Capmax:10); // capacidade maxima de cada firma
Writeln(Arq);
For i :=0 to M-1 do Writeln(Arq,'Custo de Investimento Produtor        ', i+1,
'= ', Produtor[i].Cinv:10:2); // Custo de investimento
Writeln(Arq);
For i :=0 to M-1 do Writeln(Arq,'Probabilidades                        ', i+1, '= ',
Produtor[i].Prob:10:3); // Probabilidades
Writeln(Arq);

//***** Dados do Equilibrio de
Curto Prazo *****

For i := 0 to M-1 do
begin
With Produtor[i] do Writeln(Arq,'Dados do Produtor      ', i+1, '= ',
Tipo:10, Grupo:10, ' ', A:15:5, ' ', B:15:5);
end;
Writeln(Arq);
For j := 0 to N-1 do
begin
With Consumidor[j] do Writeln(Arq,'Dados do Consumidor  ', j+1, '= ',
consumidor[j].A:15:5, ' ', consumidor[j].B:15:5);
end;
Writeln(Arq);
For i := 0 to M-1 do
begin

```

```

For j := 0 to N-1 do Write(Arq, 'Custos de Transporte Empresa ','',i+1,'
Mercado ','',j+1,'= ', Custo[i,j]: 10:4);
  Writeln(Arq);
  Writeln(Arq);
  Writeln(Arq);
end;

```

```

//***** Apresentar Resultados do Modelo
*****

```

```

  Writeln(Arq,'-----
-----');
  Writeln(Arq,' PERIODO FIRMA CAPACID EXPANS CAPACID
CAP.FUT. CAP.FUT. FLUXO VALORES PERADO');
  Writeln(Arq,'          ATUAL FUTURA FIRMA1
FIRMA2          ');
  Writeln(Arq,'-----
-----');

```

```

For w := 0 to M-1 do
begin
  t := 0;
  //i := 0;

```

```

    For p := 0 to M-1 do
    begin
      produtor[p].cap := Capinic[p] div Produtor[p].Kincr;
    end;

```

```

  i := DefinirEstado;

```

```

While t <> tMax do
begin

```

```

  If t <> 0 then DefinirCapacidades(i);

```

```

  For p := 0 to M-1 do
  begin
    k := Kotimo[t,i,p];
    produtor[p].cap := produtor[p].cap + k;
  end;

```

```

  j := DefinirEstado;

```

```

        Writeln(Arq,t:10,w+1:10,((produtor[w].Cap)-
(Kotimo[t,i,w]))*Produtor[w].Kincr:10,
                Kotimo[t,i,w]*Produtor[w].Kincr:10,
                produtor[w].Cap*Produtor[w].Kincr:10,
                produtor[0].cap*Produtor[w].Kincr:10,
                produtor[1].cap*Produtor[w].Kincr:10,' ',
                ProdutorFluxo[t,i,w]*Produtor[w].Kincr:10:4,' ',
                ValorEsperado[t,i,w]:15:4);

        i := j;
        t := t + 1;
    end;
end;
Writeln(Arq);
Writeln(Arq,'-----');
-----');
    CloseFile(Arq);

end;

constructor tNode.Create(iTipo : Char; iGrupo: Integer; iA, iB:Extended; iCap:
Integer; iKincr:integer; iCapmax:integer; iCinv, iProb, iEscala:Extended);
begin
    A := iA;
    B := iB;
    Cap := iCap;
    Tipo := iTipo;
    Grupo := iGrupo;
    Kincr := iKincr;
    Capmax := iCapmax;
    Cinv := iCinv;
    Prob := iProb;
    Escala := iEscala;
end;

function tNode.Preco: Extended;
begin
    Result := A + B * Fluxo;
end;

procedure tNode.SetCapacidade(Valor: Integer);
begin
    Cap := Valor;
end;

```

```
{ tCournotNash }
```

```
//***** Função Atualizar Fluxo  
*****
```

```
function tCournotNash.AtualizarFluxo: Extended;  
Var  
  Erro : Extended;  
  i,j : Integer;  
  V : tVetor;  
begin  
  V := tVetor.Create(N,0);  
  Result := 0;  
  For i := 0 to M-1 do  
    begin  
      V.C := Produtor[i].Cap;  
      For j := 0 to N-1 do V.SetValue(j,X[i,j] + Passo * F[i,j]);  
      V.Project;  
      For j := 0 to N-1 do  
        begin  
          Erro := Abs(X[i,j]-V.GetValue(j));  
          If Erro > Result then Result := Erro;  
          X[i,j] := V.GetValue(j);  
        end;  
      end;  
      V.Free;  
    end;  
end;
```

```
//***** Rotina Atualizar Total Fluxo Saindo  
Do Produtor E Chegando No Mercado *****
```

```
procedure tCournotNash.AtualizarFluxoProdutorConsumidor;  
Var  
  i,j : Integer;  
begin  
  For i := 0 to M-1 do Produtor[i].Fluxo := 0;  
  For j := 0 to N-1 do Consumidor[j].Fluxo := 0;  
  For i := 0 to M-1 do  
    For j := 0 to N-1 do  
      begin  
        Produtor[i].Fluxo := Produtor[i].Fluxo + X[i,j];  
        Consumidor[j].Fluxo := Consumidor[j].Fluxo + X[i,j];  
      end;  
    end;  
  end;
```

```

//***** Rotina Calcula Excedentes
*****

```

```

***** Rotina Calcular F[i,j]
*****

```

204



```

                F[i,j] := Consumidor[j].Preco + Fluxo * Consumidor[j].B      // B é
a derivada - pag 41 pdf
                - (Produtor[i].Preco + Custo[i,j]);
            end;
        end;
    end;

//***** Rotina Equilibrar
*****

```

```

procedure tCournotNash.Equilibrar(StatusBar : tStatusBar; Chart : tChart);
Var
    ErroMax,ErroAnt : Extended;
begin
    ErroMax := 1E+30;
    ErroAnt := 1E+30;
    Passo := 1;
    T0 := Now;
    Count := 0;
    If Chart <> nil then Chart.SeriesList.Series[0].Clear;
    While ErroMax > 1E-4 do
    begin
        AtualizarFluxoProdutorConsumidor;
        CalcularF;
        ErroMax := AtualizarFluxo;
        If (Count Mod 20) = 0
        then begin
            CalcularExcedentes;

            If ErroMax >= ErroAnt then Passo := Passo * 0.95;
            ErroAnt := ErroMax;
            If Chart <> nil then
            Chart.SeriesList.Series[0].AddXY(Count,ErroMax,"clRed");
            Application.ProcessMessages;
        end;
        Inc(Count);
    end;
    CalcularExcedentes;

    TF := Now;
end;

//***** Função Calcular Excedente
Consumidor *****

```

```

function tCournotNash.ExcedenteConsumidor: Extended;
Var
  j : Integer;
begin
  Result := 0;
  For j := 0 to N-1 do Result := Result + Consumidor[j].Excedente;
end;

//***** Função Calcular Excedente
Produtor *****
function tCournotNash.ExcedenteProdutor: Extended;
Var
  i : Integer;
begin
  Result := 0;
  For i := 0 to M-1 do Result := Result + Produtor[i].Excedente;
end;

//***** FUNÇÃO CALCULAR
EXCEDENTE SOCIEDADE *****

function tCournotNash.ExcedenteSociedade: Extended;
begin
  Result := ExcedenteProdutor + ExcedenteConsumidor;
end;

destructor tCournotNash.Finalizar;
begin
  Produtor := nil;
  Consumidor := nil;
  Custo := nil;
  X := nil;
  F := nil;
  ValorEstado := nil;
  ProdutorFluxo := nil;
  kOtimo := nil;
  Estadoj :=nil;
end;

function tCournotNash.GetExcedenteProdutor(i: Integer): Extended;
begin
  Result := Produtor[i].Excedente;      //ACHO QUE NÃO É
PRODUTOR[I].GETEXCEDENTE E SIM: PRODUTOR[I].EXCEDENTE
end;

```

```

//***** Ler Dados Gerais
*****

constructor tCournotNash.LerDados(NomeArquivo : String);
Var
  Arq          : TextFile;
  i,j,Grupo,Cap, Kincr, Capmax : Integer;
  A,B,Cinv, Prob, Escala      : Extended;
  Tipo          : Char;
begin
  AssignFile(Arq,NomeArquivo);
  Reset(Arq);
  Readln(Arq,M);
  Readln(Arq,N);
  SetLength(Custo,M,N);
  SetLength(X,M,N);
  SetLength(F,M,N);
  SetLength(Produtor,M);
  SetLength(Consumidor,N);
  SetLength(CapInic,M);
  Readln(Arq);
  Readln(Arq);
  For i := 0 to M-1 do begin
    Readln(Arq,Tipo,Grupo,A,B,Cap,Kincr, Capmax, Cinv, Prob, Escala);
    Produtor[i] := tNode.Create(Tipo,Grupo,A,B,Cap, Kincr, Capmax, Cinv,
Prob, Escala);
    Capinic[i] := produtor[i].cap;
  end;
  Readln(Arq);
  For j := 0 to N-1 do begin
    Readln(Arq,A,B);
    Consumidor[j] := tNode.Create(' ',0,A,B,0,0,0,0,0);
  end;
  Readln(Arq);
  For i := 0 to M-1 do
    begin
      For j := 0 to N-1 do Read(Arq,Custo[i,j]);
      Readln(Arq);
    end;
  //***** Leitura dos dados da
  programação dinâmica *****
  Readln(Arq);
  Readln(Arq,tMax);

```

```

Readln(Arq,Taxa);
Readln(Arq,TaxaA);
Readln(Arq,TaxaB);

//***** Fim da leitura dos
dados da Programação dinâmica *****
CloseFile(Arq);
end;

procedure tCournotNash.SetCapacidadeProdutor(i: Integer; Valor: Integer);
begin
  Produtor[i].Cap := Valor;
end;

procedure tCournotNash.SetDemandaConsumidor(j: Integer; newA,
  newB: Extended);
begin
  With Consumidor[j] do
    begin
      A := newA;
      B := newB;
    end;
end;

function tCournotNash.NumP: Integer;
begin
  Result := M;
end;

function tCournotNash.NumM: Integer;
begin
  Result := N;
end;

function tCournotNash.FtaxaA: Real;
begin
  Result := TaxaA;
end;

function tCournotNash.FtaxaB: Real;
begin
  Result := TaxaB;
end;

```

```

function tCournotNash.Ftmax: Integer;
begin
    Result := tMax;
end;

```

```

function tCournotNash.GetAConsumidor(m: Integer): Extended;
begin
    Result := Consumidor[m].A;
end;

```

```

function tCournotNash.GetBConsumidor(m: Integer): Extended;
begin
    Result := Consumidor[m].B;
end;

```

```

//***** Calcular O Número De Estados *****

```

```

Procedure tCournotNash.DefinirNumEstados;

```

```

begin
    For j := 0 to M-1 do
    begin
        Produtor[j].TnumCap := 0;
        Produtor[j].ProdNumCap := 0;
    end;
    For j:= 0 to M-1 do
        With produtor[j] do
        begin
            Produtor[j].TNumCap := (Produtor[j].Capmax div Produtor[j].Kincr) + 1;
            If j = 0 then Produtor[j].ProdNumCap := Produtor[j].TNumCap
            Else Produtor[j].ProdNumCap := Produtor[j-1].ProdNumCap *
Produtor[j].TnumCap
        end;
    end;
end;

```

```

//***** ROTINA CALCULA CAPACIDADES PARA CADA ESTADO *****

```

```

Procedure tCournotNash.DefinirCapacidades(i:integer);

```

```

    Var j:integer;
begin
    j:= M-1;

```

```

While j > 0 do
With Produtor[j] do
begin
  If j = M-1 then
  begin
    Produtor[j].EstAux := i;
    Produtor[j].Cap := Produtor[j].EstAux div Produtor[j-1].ProdNumCap;
  end
  else
  begin
    Produtor[j].EstAux := Produtor[j+1].EstAux mod
Produtor[j].ProdNumCap;
    Produtor[j].Cap := Produtor[j].EstAux div Produtor[j-1].ProdNumCap;
  end;
j:= j-1;
end;
  Produtor[j].EstAux := Produtor[j+1].EstAux mod Produtor[j].ProdNumCap;
  Produtor[j].Cap := Produtor[j].EstAux div 1;
end;

function tCournotNash.GetCap(m: Integer): Integer;
begin
  Result := Produtor[m].Cap;
end;

```

```

//***** FUNÇÃO DEFINE O ESTADO A
PARTIR DAS CAPACIDADES DE CADA ESTADO *****
Function tCournotNash.DefinirEstado: integer;
  Var F,j: integer; p : Integer;
  begin

    For j := 0 to M-1 do Produtor[j].Valorj := 0;
    p:= M-1;
    While p >= 0 do
      begin
        With Produtor[p] do
          begin
            F := Produtor[p].Cap;
            If p = M-1 then Produtor[p].Valorj := (1+F)*Produtor[p-1].ProdNumCap - 1
//Calcula o estado novo com o acrescimo de capacidade
            Else
              begin

```

```

        If p = 0 then Produtor[p].Valorj := Produtor[p+1].Valorj-
        ((Produtor[p].TNumCap - 1 - F)*1)
        Else Produtor[p].Valorj := Produtor[p+1].Valorj-((Produtor[p].TNumCap -
        1 - F)*Produtor[p-1].ProdNumCap);
        end;
        p:= p-1;
        end;
    end;

    Result := Produtor[0].Valorj;
end;

```

```

//***** ROTINA DE
PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ****

```

```

Procedure tCournotNash.PDinamica(ProgressBar1:tProgressBar);
Var
    t,w, i,IMax,kMax, p,k,j, q,v,l : Integer;
    Valor, NewA, NewB, FcrescA, FcrescB : Extended;
    Arq : TextFile;

```

```

begin
    AssignFile(Arq,'Debug.txt');
    Rewrite(Arq);

```

```

//*****Inicializar
dados ****

```

```

    FcrescA:= (1 + TaxaA);
    FcrescB:= (1 + TaxaB);

```

```

    DefinirNumEstados;

```

```

    IMax := Produtor[M-1].ProdNumCap;

```

```

    Setlength(ValorEstado,tMax+1,IMax,M,M);
    Setlength(ValorEsperado, tMax+1,IMax,M);
    Setlength(Kotimo,tMax+1,IMax,M);
    Setlength(demanda,tMax+1,N);
    Setlength(Estadoj,tMax+1,IMax,M);
    Setlength(ProdutorFluxo,tMax+1,IMax,M);
    SetLength(ConsumidorPreco,tMax+1,IMax,N);

```

```

For t := 0 to tMax-1 do
begin
  For i := 0 to Imax-1 do
  begin
    For w := 0 to M-1 do
    begin
      Kotimo[t,i,w] := 0;
      Estadoj[t,i,w] := 0;
      ProdutorFluxo[t,i,w] := 0;
      For v := 0 to M-1 do
      begin
        ValorEstado[t,i,w,v] := 0;
      end;
    end;
  end;
end;
end;

```

```

ProgressBar1.Max := tMax;
ProgressBar1.Position := tMax;
t := tMax-1;
While t>=0 do
begin

```

//\*\*\*\*\* Informar novas condições de mercado -  
novos valores para A e B \*\*\*\*\*

```

For w := 0 to N-1 do
begin
  If t = tMax-1 then
  begin
    newA := getAConsumidor(w) * Power(FcrescA,t);
    newB := getBConsumidor(w) / Power(FcrescB,t);
    SetDemandaConsumidor(w,newA,newB);
  end
  else
  begin
    newA := getAConsumidor(w) * Power(FcrescA,1);
    newB := getBConsumidor(w) * Power(FcrescB,1);
    SetDemandaConsumidor(w,newA,newB);
  end;
end;

```



```

For i := 0 to iMax-1 do
begin
  DefinirCapacidades(i);
  Equilibrar(nil,nil);
  For p := 0 to M-1 do
    begin
      ProdutorFluxo[t,i,p] := Produtor[p].Fluxo;

    end;
  For l := 0 to N-1 do ConsumidorPreco[t,i,l] := Consumidor[l].Preco;

  For p := 0 to M-1 do
    begin
      DefinirCapacidades(i);
      kMax := (produtor[p].Tnumcap - 1) - Produtor[p].cap;
      For k := 0 to kMax do
        begin
          produtor[p].cap := produtor[p].cap + k;
          j := DefinirEstado;
          If t = tMax-1
            then Valor := Produtor[p].Excedente / Taxa
            else Valor := Produtor[p].Excedente -
produtor[p].Cinv*Power(k*produtor[p].Kincr,produtor[p].Escala)
+
ValorEsperado[t+1,j,p]/(1+Taxa);
          If Valor > ValorEstado[t,i,p,p] then
            begin
              ValorEstado[t,i,p,p] := Valor;
              Kotimo[t,i,p] := k;
              Estadoj[t,i,p] := j;
            end;
          produtor[p].cap := produtor[p].cap - k;
        end;
      j := Estadoj[t,i,p];

      For q := 0 to M-1 do If p <> q
        then begin
          If t = tMax-1
            then Valor := Produtor[q].Excedente / Taxa
            Else Valor := Produtor[q].Excedente +
ValorEstado[t+1,j,q,p]/(1+Taxa);
          ValorEstado[t,i,q,p] := Valor;
        end;
      end;
    For q := 0 to M-1 do

```

```

begin
  ValorEsperado[t,i,q] := 0;
  For p := 0 to M-1 do ValorEsperado[t,i,q] := ValorEsperado[t,i,q] +
ValorEstado[t,i,q,p]*Produtor[p].Prob ;
  writeln(Arq,t:5,i:5,q:5,Kotimo[t,i,q]:5, Estadoj[t,i,q]:5,'
',Produtor[q].cap:10,' ',produtor[q].excedente:15:8,' ',
ValorEsperado[t,i,q]:15:8);
  For p := 0 to M-1 do Writeln(Arq,'
',p:5,ValorEstado[t,i,q,p]:15:8,Produtor[p].Prob:15:8);
  end;
end;
t := t-1;
ProgressBar1.position := t;
end;
CloseFile(Arq);
end;

```

```

procedure tCournotNash.Similar(NSimul: Integer;PB:tProgressBar);

```

```

Function SorteiaDecisor : Integer;
Var
  ProbAc,Soma : Extended;
begin
  ProbAc := Random;
  Soma := Produtor[0].Prob;
  Result := 0;
  While Soma < ProbAc do
  begin
    Result := Result + 1;
    Soma := Soma + Produtor[Result].Prob;
  end;
end;

```

```

Var
  Arq          : TextFile;
  tx           : Extended;
  t,i,q,p,j,s,k,Tselec,Imax,l : Integer;
  VP           : Array of Extended;
  Selec        : Array of Integer;
begin
  Randomize;
  AssignFile(Arq,'Simula.txt');
  SetLength(VP,M);
  SetLength(Selec,M);
  Rewrite(Arq);

```

```

//***** Apresentar Resultados da Simulação
*****

```

```

Write(Arq,'N°S.');
```

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' Cp', q+1:1,'T06');

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' Fl', q+1:1,'T06');

For l := 0 to N-1 do Write(Arq,' Pr', l+1:1,'T06');

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' VP', q+1:1,'T06');

```

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' Cp', q+1:1,'T12');
```

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' Fl', q+1:1,'T12');

For l := 0 to N-1 do Write(Arq,' Pr', l+1:1,'T12');

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' VP', q+1:1,'T12');

```

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' Cp', q+1:1,'T18');
```

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' Fl', q+1:1,'T18');

For l := 0 to N-1 do Write(Arq,' Pr', l+1:1,'T18');

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' VP', q+1:1,'T18');

```

For q := 0 to M-1 do Write(Arq,' VPres', q+1:1);
```

```

Writeln(Arq);
PB.Max := NSimul;
PB.Position := 0;
For s := 1 to NSimul do
begin
  PB.Position := s;
```

```

  Write(Arq,s:5);
  For q := 0 to M-1 do VP[q] := 0;
  For q := 0 to M-1 do Selec[q] := 0;
  t := 0;
  // i := 0;
  tx := 1;
  Tselec := 0;
```

```

  Imax := Produtor[M-1].ProdNumCap;
  Setlength(Kotimo,tMax+1,Imax,M);
```

```

  If t = 0 then
```

```

begin

For q := 0 to M-1 do
begin
produtor[q].cap := Capinic[q] div Produtor[q].Kincr;
end;

end;
i := DefinirEstado;

```

```

While t <= TMax-1 do
begin

If t <> 0 then DefinirCapacidades(i);
Equilibrar(nil,nil);
p := SorteiaDecisor;
k := kOtimo[t,i,p];
Selec[p] := 1;

```

```

If k = 0 then
begin
While Tselec < M do
begin
p := SorteiaDecisor;
k := kOtimo[t,i,p];
Selec[p] := 1;
for q := 0 to M-1 do Tselec := Tselec + Selec[q];
If k <> 0 then Tselec := M;
end;
end;
end;

```

```

For q := 0 to M-1 do
begin
If p = q then produtor[q].cap := produtor[q].cap + k;
end;

j := DefinirEstado;

```

```

    { Coletar Dados da Simulação }
    If t in [6,12,18] then
    begin

        For q := 0 to M-1 do Write(Arq,Produtor[q].Cap*Produtor[q].Kincr:9);
        For q := 0 to M-1 do
        Write(Arq,ProdutorFluxo[t,i,q]*Produtor[q].Kincr:9:2);
        For l := 0 to N-1 do Write(Arq,ConsumidorPreco[t,i,l]:9:2);

        end;

        { Acumular VP descontado ... }
        For q := 0 to M-1 do
        begin
            VP[q] := VP[q] + Produtor[q].Excedente / Tx;
            If p = q then
            If t = tMax-1 then VP[q] := VP[q] + Produtor[q].Excedente / Tx
            Else VP[q] := VP[q] - Produtor[p].Cinv * power(k*
        Produtor[p].Kincr,Produtor[p].Escala) / Tx;
        end;

        If t in [6,12,18] then
        begin
            For q := 0 to M-1 do Write(Arq,VP[q]:9:2);
        end;

        // j := Estadoj[t,i,p];
        i := j;
        t := t + 1;
        tx := tx * (1+Taxa);
        end;
        For q := 0 to M-1 do Write(Arq,VP[q]:9:2);
        Writeln(Arq);
        end;
        CloseFile(Arq);
        VP := nil;
        end;

    end.

    //Fim da Unit

    /*******
    *****/

```

unit uInterface;

interface

uses

Windows, Messages, SysUtils, Classes, Graphics, Controls, Forms, Dialogs,  
ExtCtrls, StdCtrls, Buttons, uEquilibrio, ComCtrls, TeEngine, Series,  
TeeProcs, Chart;

type

TForm1 = class(TForm)  
  Panel1: TPanel;  
  Panel2: TPanel;  
  BitBtn1: TBitBtn;  
  StatusBar1: TStatusBar;  
  Panel3: TPanel;  
  Panel4: TPanel;  
  Memo1: TMemo;  
  Memo2: TMemo;  
  Splitter1: TSplitter;  
  BitBtn2: TBitBtn;  
  Label1: TLabel;  
  Edit1: TEdit;  
  OpenDialog1: TOpenDialog;  
  Chart1: TChart;  
  Series1: TFastLineSeries;  
  BitBtn3: TBitBtn;  
  Splitter2: TSplitter;  
  BitBtn4: TBitBtn;  
  Panel5: TPanel;  
  ProgressBar1: TProgressBar;  
  procedure Resolver(Sender: TObject);  
  procedure DefinirArquivo(Sender: TObject);  
  procedure BitBtn4Click(Sender: TObject);

private

  { Private declarations }

public

  { Public declarations }

end;

var

  Form1: TForm1;

implementation

```
{SR *.DFM}
```

```
Uses URelatorio;
```

```
Var
```

```
Pr : tCournotNash;
```

```
procedure TForm1.Resolver(Sender: TObject);
```

```
begin
```

```
  Memo1.Lines.SaveToFile(Edit1.Text);
```

```
  Memo2.Lines.Clear;
```

```
  pr := tCournotNash.LerDados(Edit1.Text);
```

```
  pr.PDinamica(ProgressBar1);
```

```
  pr.Apresentar;
```

```
  Pr.Similar(5000,ProgressBar1);
```

```
  Pr.Finalizar;
```

```
  Memo2.Lines.LoadFromFile('Resultados2.txt');
```

```
  MessageDlg('Fim de processamento',mtInformation,[mbOK],0);
```

```
end;
```

```
procedure TForm1.DefinirArquivo(Sender: TObject);
```

```
begin
```

```
  If OpenFileDialog1.Execute then
```

```
  begin
```

```
    Edit1.Text := OpenFileDialog1.FileName;
```

```
    Memo1.Lines.LoadFromFile(OpenFileDialog1.FileName);
```

```
  end;
```

```
end;
```

```
procedure TForm1.BitBtn4Click(Sender: TObject);
```

```
begin
```

```
  With tForm2.Create(Application) do
```

```
  begin
```

```
    Memo1.Lines.LoadFromFile('Resultados2.txt');
```

```
    ShowModal;
```

```
    Hide;
```

```

    Free;
end;
end;

end.
//*****
*****

unit Urelatorio;

interface

uses
    Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
    Dialogs, StdCtrls, Buttons, ExtCtrls;

type
    TForm2 = class(TForm)
        Panel1: TPanel;
        Memo1: TMemo;
        BitBtn1: TBitBtn;
    private
        { Private declarations }
    public
        { Public declarations }
    end;

var
    Form2: TForm2;

implementation

{$R *.dfm}

end.
//*****
*****

unit uProjecao;
interface

Type
    TVetor = Class
        N : Integer;

```



```

C : Extended;
Value : Array of Extended;
Constructor Create(initN : Integer; initC : Extended);
Destructor Free;
Procedure SetValue(i : Integer; aValue : Extended);
Function GetValue (i : Integer) : Extended;
Procedure Project;
Function SumValues : Extended;
Function CountPositives : Integer;
Function GetMinPositive : Extended;
Procedure Show(Var Arq : TextFile);
end;

```

implementation

```

Const

```

```

    Prec = 1E-8;

```

```

{ TVetor }

```

```

function TVetor.CountPositives: Integer;

```

```

Var

```

```

    i : Integer;

```

```

begin

```

```

    Result := 0;

```

```

    For i := 0 to N-1

```

```

        do If Value[i] > Prec then Inc(Result);

```

```

    end;

```

```

constructor TVetor.Create(initN: Integer; initC: Extended);

```

```

begin

```

```

    N := initN;

```

```

    C := InitC;

```

```

    SetLength(Value,N);

```

```

end;

```

```

destructor TVetor.Free;

```

```

begin

```

```

    Value := nil;

```

```

end;

```

```

function TVetor.GetMinPositive: Extended;

```

```

Var

```

```

    i : Integer;

```

```

begin

```

```

Result := 1E+30;
For i := 0 to N-1
do If (Value[i] > Prec) and (Value[i] < Result) then Result := Value[i];
end;

```

```

function TVetor.GetValue(i: Integer): Extended;
begin
    Result := Value[i];
end;

```

```

procedure TVetor.Project;
Var
    i, Count      : Integer;
    Soma, Min, Delta : Extended;
begin
    { Zera valores negativos }
    For i := 0 to N-1 do If Value[i] < 0 then Value[i] := 0;

```

```

    { Calcula Soma }
    Soma := SumValues;
    While Soma - C > Prec do
    begin
        Count := CountPositives;
        Delta := (Soma - C) / Count;
        Min := GetMinPositive;
        If Delta < Min then Min := Delta;
        For i := 0 to N-1
        do If Value[i] > Prec
            then Value[i] := Value[i] - Min
            else Value[i] := 0;

```

```

    { Calcula Soma }
    Soma := SumValues;
    end;
end;

```

```

procedure TVetor.SetValue(i: Integer; aValue: Extended);
begin
    Value[i] := aValue;
end;

```

```

procedure TVetor.Show(var Arq: TextFile);
Var
    i : Integer;
begin

```

```

    For i := 0 to N-1 do Writeln(Arq,Value[i]:10:4);
end;

```

```

function TVetor.SumValues: Extended;
Var
    i : Integer;
begin
    Result := 0;
    For i := 0 to N-1 do Result := Result + Value[i];
end;

end.

```

```

//*****
*****

```

```

unit uVetor;
interface

```

```

Type
    TVetor = Class
        N : Integer;
        C : Extended;
        Value : Array of Extended;
        Constructor Create(initN : Integer; initC : Extended);
        Destructor Free;
        Procedure SetValue(i : Integer; aValue : Extended);
        Function GetValue (i : Integer) : Extended;
        Procedure Project;
        Function SumValues : Extended;
        Function CountPositives : Integer;
        Function GetMinPositive : Extended;
        Procedure Show(Var Arq : TextFile);
    end;

```

```

implementation

```

```

Const
    Prec = 1E-8;

```

```

{ TVetor }

```

```

function TVetor.CountPositives: Integer;
Var

```

```

    i : Integer;
begin
    Result := 0;
    For i := 0 to N-1
    do If Value[i] > Prec then Inc(Result);
end;

constructor TVetor.Create(initN: Integer; initC: Extended);
begin
    N := initN;
    C := InitC;
    SetLength(Value,N);
end;

destructor TVetor.Free;
begin
    Value := nil;
end;

function TVetor.GetMinPositive: Extended;
Var
    i : Integer;
begin
    Result := 1E+30;
    For i := 0 to N-1
    do If (Value[i] > Prec) and (Value[i] < Result) then Result := Value[i];
end;

function TVetor.GetValue(i: Integer): Extended;
begin
    Result := Value[i];
end;

procedure TVetor.Project;
Var
    i,Count      : Integer;
    Soma,Min,Delta : Extended;
begin
    { Zera valores negativos }
    For i := 0 to N-1 do If Value[i] <= 0 then Value[i] := 0;

    { Calcula Soma }
    Soma := SumValues;
    While Soma-C > Prec do
begin

```

```

    Count := CountPositives;
    Delta := (Soma - C) / Count;
    Min := GetMinPositive;
    If Delta < Min then Min := Delta;
    For i := 0 to N-1
    do If Value[i] > Prec
        then Value[i] := Value[i] - Min
        else Value[i] := 0;

    { Calcula Soma }
    Soma := SumValues;
end;
end;

procedure TVetor.SetValue(i: Integer; aValue: Extended);
begin
    Value[i] := aValue;
end;

procedure TVetor.Show(var Arq: TextFile);
Var
    i : Integer;
begin
    For i := 0 to N-1 do Writeln(Arq, Value[i]:10:4);
end;

function TVetor.SumValues: Extended;
Var
    i : Integer;
begin
    Result := 0;
    For i := 0 to N-1 do Result := Result + Value[i];
end;

end.

```

```

//*****
*****

```